А. А. Ивановъ.

Профессоръ Императорскаго Петроградскаго Университета
и Петроградскихъ Высшихъ Женскихъ Курсовъ

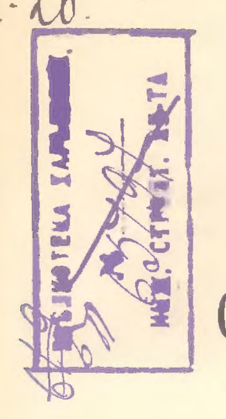
ОСНОВНОЙ КУРСЪ

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМІИ.

ПЕТРОГРАДЪ
Типографія А. Э. Коллинсъ, Петрогр. стор., Мал. Дворянская, 19
1915.

А. А. Ивановъ.

Профессоръ Императорскаго Петроградскаго Университета
и Петроградскихъ Высшихъ Женскихъ Курсовъ.



ОСНОВНОЙ КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМІИ.

ПЕТРОГРАДЪ.
Типографія А. Э. Коллинсъ, Петрогр. стор., Мал. Дворянская, 19.
1915.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Настоящій курсъ Теоретической Астрономіи содержитъ изложеніе основныхъ вопросовъ этого отдѣла науки о небесныхъ свѣтилахъ, и хотѣлось бы думать, что этотъ курсъ можетъ служить пособіемъ для лицъ, желающихъ пріобрѣсти общія свѣдѣнія въ области указаннаго отдѣла астрономіи. Сверхъ того, благодаря помѣщеннымъ въ курсѣ задачамъ и въ особенности благодаря подробнымъ примѣрамъ опредѣленія параболической и эллиптической орбитъ по тремъ наблюденіямъ книга могла бы оказаться полезной для молодыхъ астрономовъ, приступающихъ къ болѣе детальному изученію теоретической астрономіи.

Настоящій курсъ еще въ рукописи былъ просмотрѣнъ К. К. Дубровскимъ, давшемъ мнѣ много полезныхъ совѣтовъ. Онъ же принималъ дѣятельное участіе въ чтеніи корректуръ. За все это приношу ему глубокую благодарность.

Профессоръ **А. Ивановъ.**

Петроградъ,
10 ноября, 1914 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

стр.

ГЛАВА IV.

Движеніе небеснаго тѣла по эллиптической орбитѣ.

ГЛАВА V.

Движеніе небеснаго тѣла по параболической орбитѣ.

ГЛАВА VI.

Движеніе небеснаго тѣла по гиперболической орбитѣ.

ГЛАВА VII.

Вычисленіе эфемериды небеснаго тѣла.

ГЛАВА VIII.

Общія соображенія относительно опредѣленія орбитъ небесныхъ тѣлъ изъ наблюденій.

ГЛАВА IX.

Опредѣленіе параболической орбиты по тремъ наблюденіямъ.

ГЛАВА X.

Опредѣленіе эллиптической орбиты по тремъ наблюденіямъ.

Введенiе.

§ 1. Предметъ теоретической астрономiи.

Одной изъ самыхъ важныхъ задачъ астрономiи является изученiе поступательныхъ движенiй небесныхъ тѣлъ, причемъ при этомъ изученiи предполагается, что небесныя тѣла взаимно притягиваются по закону Ньютона.

Въ системахъ небесныхъ тѣлъ, напр., въ нашей солнечной системѣ, въ системѣ Юпитера, въ системѣ Сатурна и т. п., одно тѣло обыкновенно является преобладающимъ. Такое тѣло (солнце, Юпитеръ, Сатурнъ и т. п.) получаетъ названiе *центральнаго тѣла.*

На всякое небесное тѣло въ подобной системѣ, будетъ ли это планета, комета или спутникъ, кромѣ центральнаго тѣла дѣйствуютъ также и всѣ другiя небесныя тѣла. Такое относительное движенiе нѣкотораго небеснаго тѣла вокругъ центральнаго, при которомъ принимается во вниманiе влiянiе другихъ небесныхъ тѣлъ, хотя бы эти другiя небесныя тѣла сами по себѣ и не интересовали изслѣдователя, называется движенiемъ *возмущеннымъ.* Въ противоположность этому такое относительное движенiе нѣкотораго небеснаго тѣла вокругъ центральнаго, при которомъ дѣйствiе всѣхъ остальныхъ небесныхъ тѣлъ во вниманiе не принимается, называется движенiемъ *невозмущеннымъ.* Задача о невозмущенномъ движенiи какого-нибудь небеснаго тѣла иначе называется *задачей двухъ тѣлъ,* такъ какъ при этомъ предполагается, что кромѣ центральнаго тѣла и того тѣла, относительное движенiе котораго изслѣдуется, никакихъ другихъ тѣлъ не существуетъ. Задачей двухъ тѣлъ, т. е. изслѣдованiемъ невозмущеннаго движенiя небесныхъ тѣлъ, и занимается теоретическая астрономiя.

Возмущенное же движенiе разсматривается въ особомъ отдѣлѣ астрономiи, носящемъ названiе небесной механики.

§ 2. Краткій историческій очеркъ развитія теоретической астрономіи.

Прежде чѣмъ перейти къ изложенію теоретической астрономіи, полезно сдѣлать краткій историческій очеркъ развитія этого отдѣла астрономіи.

Въ древности астрономы занимались исключительно накопленіемъ наблюдательнаго матеріала. Когда матеріалъ накопился въ достаточномъ количествѣ, астрономы стали выводить законы того или другого явленія, не задаваясь при этомъ причиной, обусловливающей эти явленія. Въ частности попытки понять и объяснить различныя наблюдаемыя движенія небесныхъ тѣлъ встрѣчались уже давно, но только эти попытки относились исключительно къ области кинематики, а не къ области динамики. Къ числу такихъ попытокъ относится гипотеза древнихъ грековъ о существованіи такъ называемыхъ *кристальныхъ сферъ*. Предполагалось, что къ каждой сферѣ прикрѣплено одно какое-нибудь небесное тѣло, одна какая-нибудь планета, и что всѣ кристальныя сферы вращаются вокругъ земли съ различными скоростями. Различныя скорости вращенія этихъ сферъ объясняли различныя скорости перемѣщенія различныхъ планетъ среди звѣздъ. Къ помощи такихъ кристальныхъ сферъ прибѣгаетъ въ своемъ знаменитомъ Альмагестѣ и Птолемей, жившій во II вѣкѣ до Р. Х.

Но такъ какъ, принимая землю въ центрѣ вселенной, нельзя было объяснить всѣхъ видимыхъ движеній планетъ, то древніе астрономы, естественно, прибѣгли къ теоріи *деферентовъ* и *эпицикловъ*. Эта теорія во всей своей полнотѣ изложена въ томъ же Альмагестѣ. Деференты это суть окружности большихъ круговъ, лежащія на кристальныхъ сферахъ, центръ которыхъ совпадаетъ съ центромъ земли T (рис. 1). Въ простѣйшемъ случаѣ, напр., для солнца и луны, центръ небеснаго тѣла движется непосредственно по деференту. Для остальныхъ же небесныхъ тѣлъ приходилось предполагать, что по окружности деферента движется нѣкоторая фиктивная точка, именно центръ окружности меньшихъ размѣровъ, называемой эпицикломъ, а по окружности этого эпицикла уже движется центръ небеснаго тѣла.

Необходимо замѣтить, что по мѣрѣ того, какъ точность наблюденій увеличивалась, число эпицикловъ также приходилось увеличивать, и черезъ это теорія сильно усложнялась.

На рис. 1 по окружности деферента движется центръ C_1 перваго эпицикла, по окружности этого эпицикла движется центръ C_2 второго эпицикла, а по окружности второго эпицикла движется уже центръ планеты P.

Съ перваго взгляда теорія деферентовъ и эпицикловъ представляется очень странной. Въ дѣйствительности же она должна быть признана весьма остроумной. Нужно сознаться, что современные ученые нерѣдко поступаютъ приблизительно такъ же, какъ поступали древніе греки при представленіи движеній небесныхъ тѣлъ. Въ самомъ дѣлѣ, когда y есть функція отъ x, но видъ этой функціи неизвѣстенъ, то весьма часто y разлагаютъ въ рядъ по степенямъ x или по косинусамъ и синусамъ дугъ, кратныхъ x. Коэффиціенты въ этомъ рядѣ опредѣляютъ такъ, чтобы y, вычисленное по такой формулѣ, совпадало съ y, получаемымъ изъ наблюденій. При этомъ сначала стараются удовлетворить наблюденіямъ, удерживая два или три члена ряда; если этого оказывается недостаточно, то послѣдовательно прибавляютъ четвертый, пятый и т. д. члены. По существу дѣла такой процессъ вполнѣ аналогиченъ съ теоріей деферентовъ и эпицикловъ.

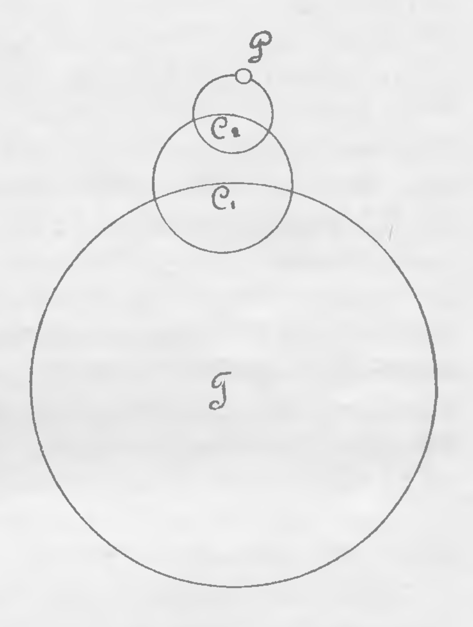


Рис. 1.

Въ такомъ примитивномъ состояніи теоретическая астрономія оставалась очень долго, а именно до временъ Коперника, Тихо-Браге и Кеплера. Коперникъ (1473—1543) рѣшился сдвинуть землю и поставить въ центръ солнечной системы солнце, вокругъ котораго обращаются по окружностямъ круговъ какъ сама земля, такъ и всѣ другія планеты. Это дало возможность весьма просто объяснить всѣ видимыя движенія планетъ. Тихо-Браге (1546—1601) собралъ весьма богатый наблюдательный матеріалъ надъ планетами, и наконецъ Кеплеръ (1571—1630), на основаніи подробнаго изслѣдованія наблюденій Тихо-Браге надъ планетой Марсомъ, открылъ свои знаменитые три закона движенія планетъ вокругъ солнца, причемъ установилъ, что эти движенія совершаются по эллиптическимъ кривымъ.

Законы Кеплера важны тѣмъ, что они объясняютъ намъ истинное движеніе планетъ вокругъ солнца, но все-же они не рѣшаютъ вопроса о причинѣ этихъ движеній.

Что касается причины движеній небесныхъ тѣлъ, то, хотя ею астрономы интересовались съ давнихъ поръ, однако удовлетворительное объясненіе было найдено сравнительно недавно.

Первая сколько-нибудь остроумная гипотеза о причинѣ движенія планетъ была предложена Декартомъ въ 1644 году. Это—гипотеза вихрей. Декартъ предполагалъ, что солнце окружено весьма разрѣженной матеріей, которая распространяется на огромныя разстоянія, такъ что окружаетъ всѣ планеты, входящія въ составъ солнечной системы. Эта матерія, это вещество подъ вліяніемъ дѣйствія солнца приходитъ во вращательное или вихревое движеніе и притомъ такъ, что части, ближайшія къ солнцу, вращаются быстрѣе, чѣмъ болѣе отдаленныя части. Такимъ образомъ вокругъ каждой планеты образуется особый вихрь весьма разрѣженной матеріи, который и заставляетъ планету двигаться. Эта гипотеза, объясняющая между прочимъ, почему болѣе удаленныя отъ солнца планеты движутся медленнѣе, чѣмъ планеты болѣе близкія къ солнцу, несмотря на все свое остроуміе, не даетъ возможности вычислять положенія планетъ на небѣ для любого момента. Поэтому она удержалась не долго и была оставлена вскорѣ послѣ того, какъ Ньютонъ (1643—1727) открылъ свой знаменитый законъ всемірнаго тяготѣнія. Этотъ законъ гласитъ, что *всякія двѣ матеріальныя точки взаимно притягиваются съ силою, прямо пропорціональною произведенію ихъ массъ и обратно пропорціональною квадрату разстоянія между ними.* Законы Кеплера являются простымъ слѣдствіемъ закона Ньютона, и обратно изъ законовъ Кеплера можетъ быть выведенъ законъ Ньютона. Исходя изъ закона Ньютона, мы можемъ съ вполнѣ удовлетворительною точностью вычислять положенія небесныхъ тѣлъ въ пространствѣ для любого момента. И можно смѣло сказать, что только съ момента открытія закона всемірнаго тяготѣнія получаетъ свое начало современная теоретическая астрономія.

Задача объ истинныхъ движеніяхъ планетъ въ общемъ видѣ есть задача очень трудная и непосильная для математическаго анализа въ настоящее время. Но наша солнечная система обладаетъ многими свойствами, которыя допускаютъ значительныя упрощенія. Такъ, массы планетъ ничтожны въ сравненіи съ массой центральнаго тѣла—солнца: масса даже самой могущественной планеты—Юпитера въ 1000 слишкомъ разъ меньше массы солнца. Далѣе, кривыя, описываемыя планетами вокругъ солнца, мало отличаются отъ окружностей круговъ. Наконецъ, плоскости, въ которыхъ происходятъ движенія планетъ вокругъ солнца, наклонены подъ весьма незначительными углами другъ къ другу. Ничтожность массъ планетъ въ сравненіи съ массой солнца позволяетъ въ первомъ приближеніи принимать во вниманіе только два тѣла, а именно солнце и ту планету, движеніе которой желательно изслѣдовать. Такимъ образомъ получается движеніе невозмущенное. Всякая же другая планета только нѣсколько видоизмѣняетъ или, какъ говорятъ астрономы,

возмущаетъ то движеніе небеснаго тѣла, которое получается какъ результатъ рѣшенія задачи двухъ тѣлъ. Такая планета, видоизмѣняющая невозмущенное движеніе, носитъ названіе *возмущающаго тѣла*, а то небесное тѣло, движеніе котораго изслѣдуется, называется въ этомъ случаѣ *возмущеннымъ*.

Малое отличіе кривыхъ, описываемыхъ большими планетами вокругъ солнца, отъ окружностей круговъ, а также незначительность угловъ, подъ которыми плоскости движенія планетъ вокругъ солнца наклонены другъ къ другу, даютъ возможность получить приближенное рѣшеніе задачи о возмущенномъ движеніи любой изъ большихъ планетъ съ точностью, вполнѣ удовлетворяющею современнымъ наблюденіямъ. Задача о возмущенномъ движеніи кометъ, для которыхъ два только что упомянутыя обстоятельства обыкновенно не имѣютъ мѣста, представляется задачей несравненно болѣе трудной, чѣмъ задача о возмущенномъ движеніи планетъ. Но въ первомъ приближеніи и для кометъ, изъ которыхъ однѣ являются постоянными членами солнечной системы, а другія лишь на короткое время появляются въ этой системѣ, можно разсматривать невозмущенное движеніе. Астероиды, по трудности рѣшенія задачи о ихъ возмущенномъ движеніи, занимаютъ положеніе, среднее между большими планетами и кометами. Для нихъ невозмущенное движеніе также можетъ быть принято за первое приближеніе.

При рѣшеніи задачи о движеніи какого-нибудь небеснаго тѣла вокругъ центральнаго приходится *интегрировать дифференціальныя уравненія*. Въ результатѣ такого интегрированія вводятся *постоянныя произвольныя*, подлежащія опредѣленію изъ наблюденій изслѣдуемаго небеснаго тѣла. Опредѣленіе постоянныхъ произвольныхъ изъ наблюденій, естественно, является одной изъ главныхъ задачъ теоретической астрономіи. Рѣшенію этой задачи посвящали свои силы многіе ученые, но главнѣйшія услуги въ этомъ отношеніи оказали астрономіи Гауссъ (1777—1855) и Ольберсъ (1758—1840), давшіе способы опредѣленія постоянныхъ интегрированія для планетныхъ и кометныхъ орбитъ,—способы, употребляющіеся и въ настоящее время почти безъ всякихъ измѣненій.

На этомъ мы и закончимъ нашъ краткій историческій очеркъ развитія теоретической астрономіи.

ГЛАВА I.

О притяженіи двухъ небесныхъ тѣлъ.

§ 3. Тѣлесный уголъ конуса. Нѣкоторыя предварительныя формулы.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ предполагать, что небесныя тѣла имѣютъ сферическую форму и состоятъ изъ безконечно-большого числа безконечно-тонкихъ сферическихъ концентрическихъ слоевъ, причемъ въ каждомъ слоѣ плотность есть величина постоянная, а отъ одного слоя къ другому она мѣняется по какому-нибудь закону. Полагая, что каждыя двѣ частицы (матеріальныя точки) въ міровомъ пространствѣ притягиваютъ другъ друга по закону Ньютона, постараемся опредѣлить, какимъ образомъ должны притягивать другъ друга два небесныя тѣла конечныхъ размѣровъ.

Для рѣшенія этой задачи предварительно слѣдуетъ выяснить, какимъ образомъ измѣряется тѣлесный уголъ какого-нибудь конуса. Всякій конусъ состоитъ, какъ извѣстно, изъ двухъ частей, имѣющихъ общую вершину и расположенныхъ по разныя стороны отъ этой вершины. Опишемъ изъ этой вершины, какъ изъ центра, сферу радіусомъ, равнымъ единицѣ. Въ этомъ случаѣ площадь, которую одна часть конуса вырѣзываетъ на поверхности такой сферы, и принимается за мѣру тѣлеснаго угла конуса. Если изъ того же центра опишемъ рядъ концентрическихъ сферъ радіусами R_1, R_2 и т. д., то на поверхностяхъ этихъ сферъ разсматриваемая часть конуса вырѣжетъ, какъ нетрудно понять, площади $SR^2{}_1$, $SR^2{}_2$ и т. д., гдѣ S есть площадь, вырѣзанная на поверхности сферы, описанной радіусомъ, равнымъ единицѣ. Отсюда слѣдуетъ, что если изъ вершины конуса опишемъ сферу произвольнаго радіуса, то мѣрой тѣлеснаго угла конуса будетъ служить площадь, вырѣзываемая одной частью конуса на поверхности этой сферы, раздѣленная на квадратъ радіуса сферы.

Такъ какъ поверхность сферы равна $4\pi R^2$, то отсюда вытекаетъ, что сумма тѣлесныхъ угловъ всѣхъ безконечно-малыхъ конусовъ, которые могутъ быть построены вокругъ одной точки, равна 4π, причемъ пред-

и что $4\pi\sigma a^2 \triangle a$ есть масса M всего сферическаго слоя, будемъ имѣть:

$$\triangle R = \frac{k^2 \mu M}{OP^2}.$$

Это значитъ, что сферическій слой, масса котораго равна M, и частица P, обладающая массой μ, при дѣйствіи закона Ньютона взаимно притягиваются такъ, какъ будто бы вся масса сферическаго слоя была сосредоточена въ его центрѣ, причемъ при однородности сферическаго слоя его геометрическій центръ, конечно, совпадаетъ съ его центромъ инерціи.

§ 5. Взаимное притяженіе двухъ небесныхъ тѣлъ.

Мы будемъ предполагать, что небесныя тѣла имѣютъ шарообразную форму и состоятъ изъ концентрическихъ однородныхъ слоевъ, причемъ при переходѣ отъ одного слоя къ другому плотность мѣняется по нѣкоторому закону. Въ такомъ случаѣ легко вывести, какимъ образомъ будутъ взаимно притягиваться нѣкоторое небесное тѣло и частица P, обладающая массой μ. Частица P и слои, изъ которыхъ состоитъ небесное тѣло и массы которыхъ равны

$$M_1,\ M_2, \ldots M_n,$$

по предыдущему взаимно притягиваются съ силами:

$$R_1 = \frac{k^2 \mu M_1}{OP^2},\ R_2 = \frac{k^2 \mu M_2}{OP^2}, \ldots\ R_n = \frac{k^2 \mu M_n}{OP^2}.$$

Равнодѣйствующая R этихъ силъ, направленныхъ по линіи OP, соединяющей частицу P съ центромъ O сферы, равна суммѣ

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_n.$$

Поэтому

$$R = \frac{k^2 \mu}{OP^2}(M_1 + M_2 + \ldots + M_n).$$

Но такъ какъ сумма

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n$$

равна массѣ M' небеснаго тѣла, то получаемъ:

$$R = \frac{k^2 \mu M'}{OP^2}.$$

Это выраженіе показываетъ, что небесное тѣло M' и частица P, обладающая массой μ, взаимно притягиваются такъ, какъ будто бы вся масса этого тѣла была сосредоточена въ его центрѣ.

Теперь остается показать, какимъ образомъ взаимно притягиваются два небесныхъ тѣла сферической формы, массы которыхъ равны M' и M'' и центры которыхъ находятся другъ отъ друга на разстояніи r.

Разобьемъ второе тѣло M'' на безконечно-большое число безконечно-малыхъ элементовъ. Тогда первое тѣло M' и каждый изъ элементовъ второго тѣла взаимно притягиваются такъ, какъ будто бы вся масса M' перваго тѣла была сосредоточена въ его центрѣ. Слѣдовательно, тѣло M' можно замѣнить частицей, обладающей массой M' и по своему положенію совпадающей съ центромъ этого тѣла. Въ такомъ случаѣ мы будемъ разсматривать взаимное притяженіе частицы M' и безконечно-малыхъ элементовъ тѣла M'', которые будемъ комбинировать въ пары подобно тому, какъ это было сдѣлано въ § 4. Тогда легко выведемъ, что и тѣло M'' можно замѣнить матеріальной точкой, обладающей массой M'' и по положенію своему совпадающей съ центромъ этого тѣла. А отсюда уже выводимъ заключеніе, что *два какихъ-нибудь небесныхъ тѣла взаимно притягиваются такъ, какъ будто бы ихъ массы M' и M'' были сосредоточены въ ихъ центрахъ,* причемъ при нашихъ предположеніяхъ о строеніи небесныхъ тѣлъ ихъ геометрическіе центры совпадаютъ съ ихъ центрами инерціи. Сила F ихъ взаимнаго притяженія выражается формулой:

$$F = \frac{k^2 M' M''}{r^2}.$$

ГЛАВА II.

Выводъ законовъ Кеплера изъ закона Ньютона.

§ 6. Дифференціальныя уравненія движенія въ задачѣ двухъ тѣлъ

Положимъ, что мы имѣемъ два небесныхъ тѣла и что массы ихъ суть m_1 и m_2, и въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ будемъ исходить изъ закона Ньютона. Допустимъ, что разсматриваемыя нами небесныя тѣла имѣютъ сферическую форму и состоятъ изъ ряда концентрическихъ однородныхъ слоевъ. Въ такомъ случаѣ. какъ мы видѣли въ § 5, эти два тѣла притягиваютъ другъ друга такъ, какъ будто бы ихъ массы m_1 и m_2 были сосредоточены въ ихъ центрахъ инерціи. Слѣдовательно, мы можемъ наши тѣла замѣнить матеріальными точками, обладающими массами m_1 и m_2 и совпадающими съ центрами инерціи разсматриваемыхъ небесныхъ тѣлъ. Сила притяженія F этихъ двухъ точекъ выражается слѣдующей формулой:

$$F = \frac{k^2 m_1 m_2}{r^2},$$

гдѣ k^2 есть коэффиціентъ притяженія, а r — разстояніе между точками m_1 и m_2.

Вообразимъ себѣ въ пространствѣ прямолинейныя прямоугольныя координатныя оси съ началомъ въ произвольной точкѣ O. Назовемъ координаты точки m_1 буквами ξ_1, η_1, ζ_1, координаты точки m_2 буквами ξ_2, η_2, ζ_2. Тогда разстояніе r представится формулой:

$$r = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}.$$

Чтобы написать дифференціальныя уравненія движенія точекъ m_1 и m_2 въ пространствѣ, разложимъ ихъ движенія на три составляющихъ движенія по осямъ координатъ OX, OY, OZ.

Разсмотримъ движенiе точки m_1 по оси OX и напишемъ, что произведенiе массы этой точки на ея ускоренiе въ движенiи по оси OX равно проекцiи силы F на ту же ось, т. е.

$$m_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\xi_1 - \xi_2}{r}.$$

Здѣсь $\frac{\xi_1 - \xi_2}{r}$ есть косинусъ угла, составляемаго направленiемъ $m_1 m_2$ съ осью OX. Совершенно подобнымъ же образомъ составимъ дифференцiальныя уравненiя составляющихъ движенiй точки m_1 по осямъ OY и OZ. Всѣ три дифференцiальныя уравненiя движенiя точки m_1 въ пространствѣ окончательно будутъ имѣть такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \cdot \frac{(\xi_1 - \xi_2)}{r^3} \\ m_1 \frac{d^2\eta_1}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \frac{(\eta_1 - \eta_2)}{r^3} \\ m_1 \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \cdot \frac{(\zeta_1 - \zeta_2)}{r^3}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Такимъ же путемъ получаются три дифференцiальныя уравненiя движенiя точки m_2 въ пространствѣ. Въ этомъ случаѣ надо имѣть въ виду, что сила F дѣйствуетъ не по направленiю отъ m_1 къ m_2, а по направленiю отъ m_2 къ m_1. Поэтому имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} m_2 \frac{d^2\xi_2}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \cdot \frac{(\xi_2 - \xi_1)}{r^3} \\ m_2 \frac{d^2\eta_2}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \cdot \frac{(\eta_2 - \eta_1)}{r^3} \\ m_2 \frac{d^2\zeta_2}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \cdot \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)}{r^3}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4')$$

Чтобы рѣшить задачу о движенiи точекъ m_1 и m_2 въ пространствѣ, надо проинтегрировать 6 дифференцiальныхъ уравненiй второго порядка (4) и (4′), причемъ эти 6 уравненiй мы должны разсматривать совокупно Такое интегрированiе должно ввести 12 постоянныхъ произвольныхъ.

§ 7. Движенiе центра инерцiи системы, состоящей изъ двухъ точекъ m_1 и m_2.

Приступимъ къ интегрированiю уравненiй (4) и (4′). Сложимъ первое, второе и третье уравненiя системы (4) соотвѣтственно съ первымъ, вторымъ и третьимъ уравненiями системы (4′). Тогда получается:

$$m_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = 0$$

$$m_1 \frac{d^2\eta_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\eta_2}{dt^2} = 0$$

$$m_1 \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\zeta_2}{dt^2} = 0.$$

Эти уравненія могутъ быть переписаны въ такомъ видѣ:

$$\frac{d}{dt}\left[m_1 \frac{d\xi_1}{dt} + m_2 \frac{d\xi_2}{dt}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[m_1 \frac{d\eta_1}{dt} + m_2 \frac{d\eta_2}{dt}\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[m_1 \frac{d\zeta_1}{dt} + m_2 \frac{d\zeta_2}{dt}\right] = 0.$$

Интегрированіе намъ даетъ:

$$m_1 \frac{d\xi_1}{dt} + m_2 \frac{d\xi_2}{dt} = \alpha_1$$

$$m_1 \frac{d\eta_1}{dt} + m_2 \frac{d\eta_2}{dt} = \beta_1$$

$$m_1 \frac{d\zeta_1}{dt} + m_2 \frac{d\zeta_2}{dt} = \gamma_1,$$

гдѣ α_1, β_1, γ_1 суть три постоянныхъ произвольныхъ, введенныхъ интегрированіемъ. Эти уравненія опять легко интегрируются. Послѣ новаго интегрированія получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 &= \alpha_1 t + \alpha_2 \\ m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 &= \beta_1 t + \beta_2 \\ m_1 \zeta_1 + m_2 \zeta_2 &= \gamma_1 t + \gamma_2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

Здѣсь α_2, β_2, γ_2 суть три новыхъ постоянныхъ произвольныхъ, введенныхъ интегрированіемъ.

Если $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ и $\bar{\zeta}$ обозначаютъ координаты центра инерціи системы, состоящей изъ двухъ точекъ m_1 и m_2, то должны существовать, какъ извѣстно, слѣдующія соотношенія:

$$M_{1,2}\bar{\xi} = m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2$$

$$M_{1,2}\bar{\eta} = m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2$$

$$M_{1,2}\bar{\zeta} = m_1 \zeta_1 + m_2 \zeta_2,$$

гдѣ $M_{1,2} = m_1 + m_2$. Имѣя это въ виду, мы можемъ уравненія (5) переписать такъ:

$$\left.\begin{aligned} M_{1,2}\bar{\xi} &= \alpha_1 t + \alpha_2 \\ M_{1,2}\bar{\eta} &= \beta_1 t + \beta_2 \\ M_{1,2}\bar{\zeta} &= \gamma_1 t + \gamma_2 . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5')$$

Эти уравненія показываютъ, что координаты центра инерціи системы, состоящей изъ двухъ точекъ m_1 и m_2, измѣняются пропорціонально времени, или, иначе говоря, что этотъ центръ инерціи движется равномѣрно. Найдемъ же скорость движенія центра инерціи нашей системы. Для этого продифференцируемъ уравненія (5′). Тогда получимъ:

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \frac{\alpha_1}{M_{1,2}}$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} = \frac{\beta_1}{M_{1,2}}$$

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = \frac{\gamma_1}{M_{1,2}} .$$

Возвышая эти производныя въ квадратъ, складывая ихъ квадраты и извлекая изъ суммы квадратный корень, мы и получимъ скорость $\bar{V}$ движенія центра инерціи нашей системы, а именно:

$$V = \sqrt{\left(\frac{d\bar{\xi}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{\eta}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{\zeta}}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}}{M_{1,2}} .$$

Мы видимъ, что скорость V постоянна, какъ это и должно быть при равномѣрномъ движеніи.

Найдемъ теперь траекторію центра инерціи системы, состоящей изъ двухъ точекъ m_1 и m_2. Для этого надо исключить время t изъ уравненія (5′). По каждому изъ уравненій (5′) мы можемъ опредѣлить величину t; именно мы получаемъ:

$$t = \frac{M_{1,2}\bar{\xi} - \alpha_2}{\alpha_1}$$

$$t = \frac{M_{1,2}\bar{\eta} - \beta_2}{\beta_1}$$

$$t = \frac{M_{1,2}\bar{\zeta} - \gamma_2}{\gamma_1} .$$

Приравнивая другъ другу эти различныя выраженія величины t, мы и получимъ результатъ исключенія времени t изъ уравненій (5′) или, иначе говоря, получимъ уравненія траекторіи цент[illegible] нашей системы. Эти уравненія имѣютъ видъ:

$$\frac{M_{1,2}\,\bar{\xi} - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{M_{1,2}\,\bar{\eta} - \beta_2}{\beta_1} = \frac{M_{1,2}\,\bar{\zeta} - [illegible]}{[illegible]}$$

Изъ аналитическои геометріи извѣстно, что э[illegible]ні пря-мой линіи въ пространствѣ. Изъ всего предыдущаг[illegible] *центръ инерціи системы, состоящей изъ двухъ точекъ m_1 и m_2, движется по прямой линіи съ постоянной скоростью.*

§ 8. Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія точекъ m_1 и m_2 по отношенію къ ихъ центру инерціи.

Зная движеніе центра инерціи системы, состоящей изъ двухъ точекъ m_1 и m_2, мы могли бы составить себѣ полное представленіе о движеніи этихъ точекъ въ пространствѣ, если бы опредѣлили относительное движеніе каждои изъ нихъ по отношенію къ ихъ общему центру инерціи. Получить дифференціальныя уравненія относительнаго движенія этихъ точекъ по отношенію къ ихъ общему центру инерціи нетрудно. Для этого стоитъ только начало координатъ помѣстить не въ произвольной точкѣ пространства, а въ центрѣ инерціи нашей системы, оставивъ направленія осей параллельными прежнимъ. Назовемъ координаты точекъ m_1 и m_2 въ этомъ случаѣ буквами ξ'_1, η'_1, ζ'_1 и ξ'_2, η'_2, ζ'_2. Нетрудно убѣдиться, что дифференціальныя уравненія движенія нашихъ точекъ сохранятъ прежній видъ, т. е. они будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
m_1\,\frac{d^2\xi'_1}{dt^2} &= -\,k^2 m_1 m_2 \,.\, \frac{(\xi'_1 - \xi'_2)}{r^3}\\
m_1\,\frac{d^2\eta'_1}{dt^2} &= -\,k^2 m_1 m_2 \,.\, \frac{(\eta'_1 - \eta'_2)}{r^3}\\
m_1\,\frac{d^2\zeta'_1}{dt^2} &= -\,k^2 m_1 m_2 \,.\, \frac{(\zeta'_1 - \zeta'_2)}{r^3}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(6')$$

$$\left.\begin{aligned}
m_2\,\frac{d^2\xi'_2}{dt^2} &= -\,k^2 m_1 m_2 \,.\, \frac{(\xi'_2 - \xi'_1)}{r^3}\\
m_2\,\frac{d^2\eta'_2}{dt^2} &= -\,k^2 m_1 m_2 \,.\, \frac{(\eta'_2 - \eta'_1)}{r^3}\\
m_2\,\frac{d^2\zeta'_2}{dt^2} &= -\,k^2 m_1 m_2 \,.\, \frac{(\zeta'_2 - \zeta'_1)}{r^3},
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(6'')$$

причемъ r теперь выражается формулой:

$$r = \sqrt{(\xi'_2 - \xi'_1)^2 + (\eta'_2 - \eta'_1)^2 + (\zeta'_2 - \zeta'_1)^2}.$$

Такъ какъ начало координатъ совпадаетъ съ центромъ инерціи системы, состоящей изъ точекъ m_1 и m_2, то, очевидно, имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$m_1 \xi'_1 + m_2 \xi'_2 = 0$$
$$m_1 \eta'_1 + m_2 \eta'_2 = 0$$
$$m_1 \zeta'_1 + m_2 \zeta'_2 = 0.$$

Отсюда легко получаемъ:

$$\xi'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \cdot \xi'_2 \qquad \xi'_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot \xi'_1$$
$$\eta'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \cdot \eta'_2 \qquad \text{и} \qquad \eta'_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot \eta'_1$$
$$\zeta'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \cdot \zeta'_2 \qquad \zeta'_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot \zeta'_1.$$

При помощи этихъ соотношеній дифференціальныя уравненія движенія точекъ m_1 и m_2 безъ труда преобразовываемъ въ слѣдующія:

$$\frac{d^2\xi'_1}{dt^2} = -\frac{k^2(m_1 + m_2)\,\xi'_1}{r^3} \qquad \frac{d^2\xi'_2}{dt^2} = -\frac{k^2(m_1 + m_2)\,\xi'_2}{r^3}$$
$$\frac{d^2\eta'_1}{dt^2} = -\frac{k^2(m_1 + m_2)\,\eta'_1}{r^3} \qquad \text{и} \qquad \frac{d^2\eta'_2}{dt^2} = -\frac{k^2(m_1 + m_2)\,\eta'}{r^3}$$
$$\frac{d^2\zeta'_1}{dt^2} = -\frac{k^2(m_1 + m_2)\,\zeta'_1}{r^3} \qquad \frac{d^2\zeta'_2}{dt^2} = -\frac{k_2(m_1 + m_2)\,\zeta'_2}{r^3}.$$

Но такъ какъ кромѣ того

$$r = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \rho_1 \qquad \text{или} \qquad r = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \rho_2,$$

гдѣ

$$\rho_1 = \sqrt{\xi^2_1 + \eta^2_1 + \zeta^2_1} \qquad \text{и} \qquad \rho_2 = \sqrt{\xi_2{}^2 + \eta_2{}^2 + \zeta_2{}^2}$$

суть разстоянія точекъ m_1 и m_2 отъ ихъ общаго центра инерціи, то окончательно имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi'_1}{dt^2} &= -\frac{k^2\mu_1\xi'_1}{\rho_1{}^3} \\ \frac{d^2\eta_1}{dt^2} &= -\frac{k^2\mu_1\eta'_1}{\rho_1{}^3} \\ \frac{d^2\zeta'_1}{dt^2} &= -\frac{k^2\mu_1\zeta'_1}{\rho_1{}^3} \end{aligned}\right\} \ldots (6''') \qquad \left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi'_2}{dt^2} &= -\frac{k^2\mu_2\xi'_2}{\rho_2{}^3} \\ \frac{d^2\eta'_2}{dt^2} &= -\frac{k^2\mu_2\eta'_2}{\rho_2{}^3} \\ \frac{d^2\zeta'_2}{dt^2} &= -\frac{k^2\mu_2\zeta'_2}{\rho_2{}^3}, \end{aligned}\right\} \ldots (6^{IV})$$

причемъ

$$\mu_1 = \frac{m_2{}^3}{(m_1 + m_2)^2} \quad \text{и} \quad \mu_2 = \frac{m_1{}^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Мы видимъ, что теперь дифференціальныя уравненія движенія каждой изъ точекъ m_1 и m_2 могутъ быть проинтегрированы независимо одни отъ другихъ. Въ математическомъ отношеніи эта задача не представляетъ трудностей, и о результатѣ этого интегрированія будетъ сказано въ § 11. Но въ приложеніи къ астрономіи опредѣленіе изъ наблюденій постоянныхъ произвольныхъ, которыя должны быть введены интегрированіемъ, въ этомъ случаѣ невозможно, такъ какъ на практикѣ мы всегда наблюдаемъ относительное движеніе какой-нибудь планеты по отношенію къ центру инерціи солнца, а не по отношенію къ центру инерціи системы, состоящей изъ солнца и планеты. Поэтому намъ гораздо удобнѣе изучить относительное движеніе одной изъ нашихъ точекъ m_1, которую мы примемъ за планету, по отношенію къ другой m_2, которую мы примемъ за солнце. При этомъ необходимо замѣтить, что, вслѣдствіе огромной массы солнца по сравненію съ массами планетъ, центръ инерціи солнечной системы почти совпадаетъ съ центромъ инерціи самого солнца.

§ 9. Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія точки m_1 по отношенію къ точкѣ m_2.

Представимъ себѣ новыя прямолинейныя прямоугольныя координатныя оси, параллельныя прежнимъ, но съ началомъ въ точкѣ m_2. Назовемъ новыя координаты точки m_1 буквами x, y, z. Онѣ выражаются въ зависимости отъ старыхъ такимъ образомъ:

$$x = \xi'_1 - \xi'_2, \qquad y = \eta'_1 - \eta'_2, \qquad z = \zeta'_1 - \zeta'_2 \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Новыя координаты точки m_2, очевидно, равны нулю.

Обратимся далѣе къ уравненіямъ (6′) и (6″) и перепишемъ ихъ въ такомъ видѣ:

$$\frac{d^2\xi'}{dt^2} = \; k^2 m_2 \, . \, \frac{(\xi'_1 - \xi'_2)}{r^3} \qquad\qquad \frac{d^2\xi'_2}{dt^2} = -k^2 m_1 \, . \, \frac{(\xi'_2 - \xi'_1)}{r^3}$$

$$\frac{d^2\eta'_1}{dt^2} = -k^2 m_2 \, . \, \frac{(\eta'_1 - \eta'_2)}{r^3} \qquad \text{и} \qquad \frac{d^2\eta'_2}{dt^2} = -k^2 m_1 \, . \, \frac{(\eta'_2 - \eta'_1)}{r^3}$$

$$\frac{d^2\zeta'_1}{dt^2} = -k^2 m_2 \, . \, \frac{(\zeta'_1 - \zeta'_2)}{r^3} \qquad\qquad \frac{d^2\zeta'_2}{dt^2} = -k^2 m_1 \, . \, \frac{(\zeta'_2 - \zeta'_1)}{r^3}.$$

Вычитая въ этой системѣ уравненій изъ перваго четвертое, изъ второго пятое и изъ третьяго шестое, получаемъ:

$$\frac{d^2(\xi'_1 - \xi'_2)}{dt^2} = -k^2(m_1 + m_2)\frac{(\xi'_1 - \xi'_2)}{r^3}$$

$$\frac{d^2(\eta'_1 - \eta'_2)}{dt^2} = -k^2(m_1 + m_2)\frac{(\eta'_1 - \eta'_2)}{r^3}$$

$$\frac{d^2(\zeta'_1 - \zeta'_2)}{dt^2} = -k^2(m_1 + m_2)\frac{(\zeta'_1 - \zeta'_2)}{r^3}.$$

Имѣя въ виду соотношенія (7) и помня, что $m_1 + m_2 = M_{1,2}$, мы предыдущія уравненія переписываемъ такъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2 M_{1,2}\frac{x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2 M_{1,2}\frac{y}{r^3} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -k^2 M_{1,2}\frac{z}{r^3}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

причемъ теперь r выражается формулой:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Это и суть дифференціальныя уравненія относительнаго движенія точки m_1 по отношенію къ точкѣ m_2. Интегрированіе этихъ трехъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка должно ввести шесть постоянныхъ произвольныхъ.

§ 10. Интегралы площадей. Первый законъ Кеплера.

Приступимъ къ интегрированію уравненій (8). Для этого третье уравненіе умножимъ на y, а второе на $-z$ и сложимъ ихъ; затѣмъ первое уравненіе умножимъ на z, а третье на $-x$ и сложимъ ихъ; наконецъ, второе уравненіе умножимъ на x, а первое на $-y$ и сложимъ ихъ. Въ такомъ случаѣ получимъ:

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Эти уравненія могутъ быть переписаны въ такомъ видѣ:

$$\frac{d}{dt}\left[y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right]=0$$
$$\frac{d}{dt}\left[z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right]=0$$
$$\frac{d}{dt}\left[x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right]=0.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}&=a_1\\ z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}&=a_2\\ x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}&=a_3.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(9)$$

Эти интегралы называются *интегралами площадей*. Чтобы понять это названіе, выяснимъ геометрическое значеніе уравненій (9). Обратимся къ третьему изъ этихъ уравненій, въ которое входятъ только координаты x и y. Эти координаты опредѣляютъ положеніе проекціи точки m_1 на плоскость XOY. Введемъ на этой плоскости полярныя координаты уравненіями:

$$x=r_{xy}\cos\theta_{xy},\quad y=r_{xy}\sin\theta_{xy}.$$

Беря производныя по времени, получаемъ:

$$\frac{dx}{dt}=\cos\theta_{xy}\frac{dr_{xy}}{dt}-r_{xy}\sin\theta_{xy}\frac{d\theta_{xy}}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt}=\sin\theta_{xy}\frac{dr_{xy}}{dt}+r_{xy}\cos\theta_{xy}\frac{d\theta_{xy}}{dt}.$$

Произведя соотвѣтственныя перемноженія, находимъ:

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r^2_{xy}\frac{d\theta_{xy}}{dt}.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ получаемъ:

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=r^2_{yz}\frac{d\theta_{y}}{dt}$$
$$z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=r^2_{zx}\frac{d\theta_{zx}}{dt}.$$

Легко видѣть, что выраженія $r^2_{xy}d\theta_{xy}$, $r^2_{y}d\theta_{yz}$, $r^2_{zx}d\theta_{zx}$ суть удвоенныя элементарныя площади, описываемыя радіусами r_{xy}, r_{yz}, r_{zx} въ пло-

скостяхъ координатъ въ безконечно малый промежутокъ времени dt. Пусть dS_{xy}, dS_{yz} и dS_{zx} обозначаютъ соотвѣтственно эти элементарныя площади. Тогда уравненія (9) мы можемъ переписать въ такомъ видѣ:

$$dS_{yz} = \frac{1}{2} a_1 dt, \;\; dS_{zx} = \frac{1}{2} a_2 dt, \;\; dS_{xy} = \frac{1}{2} a_3 dt.$$

Отсюда послѣ интегрированія получаемъ:

$$S_{yz} = \frac{1}{2} a_1 (t - t_0), \;\; S_{zx} = \frac{1}{2} a_2 (t - t_0), \;\; S_{xy} = \frac{1}{2} a_3 (t - t_0).$$

Эти выраженія показываютъ, что площади, описываемыя радіусами r_{yz}, r_{zx}, r_{xy} въ плоскостяхъ координатъ, пропорціональны промежуткамъ времени, въ теченіе которыхъ онѣ описаны. Въ этихъ выраженіяхъ t_0 есть постоянная, введенная интегрированіемъ. Она представляетъ собою моментъ, для котораго площади S_{yz}, S_{zx} и S_{xy} равны нулю и съ котораго мы вообще начинаемъ разсматривать движеніе точки m_1 вокругъ точки m_2. Замѣтимъ, что постоянныя $\frac{1}{2} a_1$, $\frac{1}{2} a_2$ и $\frac{1}{2} a_3$ представляютъ собою площади, описываемыя на плоскостяхъ координатъ въ единицу времени проекціями r_{yz}, r_{zx} и r_{xy} радіусовъ на эти плоскости, и могутъ быть какъ положительными, такъ и отрицательными величинами.

Умножимъ теперь первое изъ уравненій (9) на x, второе на y, третье на z и сложимъ ихъ. Тогда будемъ имѣть:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что это есть уравненіе плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, т. е. черезъ точку m_2. Такъ какъ уравненіе (10) есть слѣдствіе уравненій (9), которыя въ свою очередь вытекаютъ изъ уравненій движенія (8), то очевидно, что координаты x, y, z точки m_1 во все время движенія должны удовлетворять уравненію плоскости (10). Слѣдовательно, *относительное движеніе точки m_1 по отношенію къ точкѣ m_2 происходитъ въ плоскости, проходящей черезъ точку m_2.*

Введемъ теперь вмѣсто постоянныхъ a_1, a_2, a_3 нѣкоторыя другія постоянныя, обыкновенно употребляющіяся въ астрономіи. Для этой цѣли воспользуемся слѣдующими соображеніями.

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что a_1, a_2 и a_3 суть составляющія на координатныхъ осяхъ нѣкотораго отрѣзка c_1, откладываемаго на перпендикулярѣ OP (рис. 4) къ плоскости ONM, въ которой происходитъ движеніе точки m_1 и которая представляется уравненіемъ (10). Поэтому мы можемъ написать:

$$a_1 = c_1 \cos \angle POX, \;\; a_2 = c_1 \cos \angle POY, \;\; a_3 = c_1 \cos \angle POZ \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Для опредѣленія входящихъ въ эти выраженія косинусовъ, опишемъ изъ начала координатъ O, какъ изъ центра, сферу радіусомъ, равнымъ единицѣ. Пусть плоскость движенія NOM пересѣкается съ этой сферой по окружности NM. Положимъ, что за плоскость XOY принята плоскость эклиптики, такъ что окружность XNY представляетъ на нашей сферѣ эклиптику. Пусть ось OX направлена въ точку весенняго равноденствія, а ось OY въ точку, долгота которой равна 90°. Тогда положеніе плоскости NOM опредѣлится двумя величинами: 1) ея *наклонностью* къ плоскости эклиптики, т. е. угломъ MNY, и 2) *долготой восходящаго узла* плоскости NOM по отношенію къ плоскости эклиптики, т. е. угломъ XON, который составляетъ съ осью OX линія пересѣченія этихъ плоскостей или такъ называемая *линія узловъ* плоскости NOM по отношенію къ плоскости эклиптики. Назовемъ эти двѣ величины соотвѣтственно знаками i и ☊.

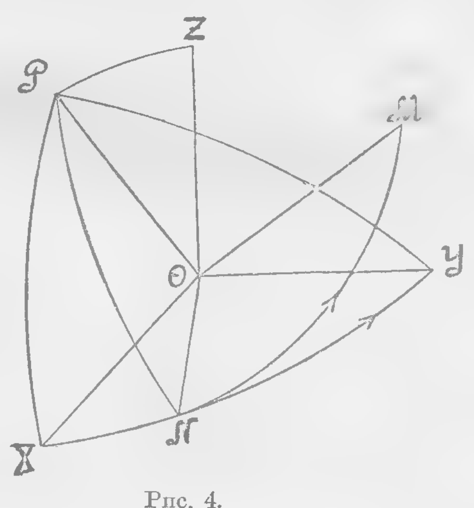


Рис. 4.

Черезъ эти постоянныя i и ☊ и могутъ быть выражены косинусы, входящіе въ формулы (11).

Для опредѣленія $\cos \angle POX$ разсмотримъ сферическій треугольникъ PXN, въ которомъ

$$PX = \angle POX,\ PN = 90^\circ,\ XN = ☊,\ \angle PNX = 90^\circ - i.$$

Изъ этого треугольника находимъ:

$$\cos \angle POX = \sin ☊ \sin i.$$

Далѣе, для опредѣленія $\cos \angle POY$ обращаемся къ сферическому треугольнику PNY, въ которомъ

$$PY = \angle POY,\ PN = 90^\circ,\ NY = 90^\circ - ☊,\ \angle PNY = 90^\circ + i.$$

Изъ этого треугольника получаемъ:

$$\cos \angle POY = - \cos ☊ \sin i.$$

Наконецъ, замѣчая, что $\angle POZ$, какъ уголъ между перпендикулярами къ плоскости NOM и къ плоскости эклиптики, равенъ i, имѣемъ:

$$\cos \angle POZ = \cos i.$$

Вставляя въ формулы (11) вмѣсто $\cos \angle POX$, $\cos \angle POY$ и $\cos \angle POZ$ только что найденныя ихъ величины, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \quad c_1 \sin i \sin \Omega \\ a_2 &= - c_1 \sin i \cos \Omega \\ a_3 &= \quad c_1 \cos i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Постоянныя i и Ω вполнѣ опредѣляютъ положеніе въ пространствѣ той плоскости NOM, въ которой происходитъ движеніе точки m_1.

Если мы въ формулахъ (12) постоянную c_1 и $\sin i$ всегда будемъ считать положительными, то по этимъ формуламъ безъ всякой двойственности опредѣлимъ c_1, i и Ω, если извѣстны a_1, a_2, a_3. Уголъ i, какъ уголъ взаимнаго наклоненія двухъ плоскостей, можетъ заключаться только или въ первой или во второй четверти, что опредѣляется знакомъ $\cos i$ или, какъ показываютъ формулы (12), знакомъ постоянной a_3. Если при движеніи точки m_1, представляющей какое-нибудь небесное тѣло, по направленію отъ N къ M долготы этого небеснаго тѣла увеличиваются (рис. 4), то уголъ $i = \angle MNY$ принимается лежащимъ въ первой четверти. Если же (рис. 5) при движеніи небеснаго тѣла m_1 отъ N къ M его долготы уменьшаются, то уголъ $i = \angle MNY$ принимается лежащимъ во второй четверти. Въ первомъ случаѣ движеніе небеснаго тѣла называется *прямымъ*, во второмъ—*обратнымъ*. Обратнымъ движеніемъ обладаютъ нѣкоторыя кометы.

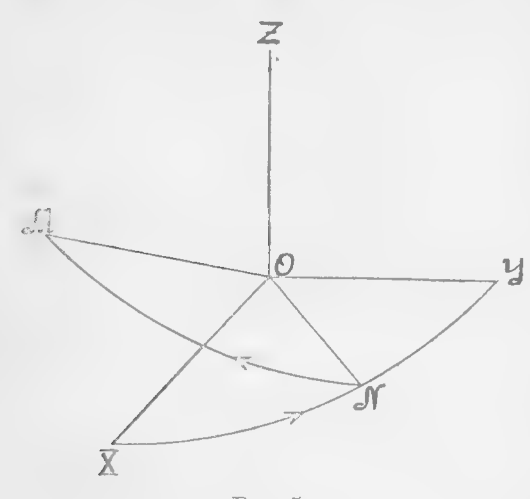


Рис. 5.

Формулы (12) опредѣляютъ постоянныя a_1, a_2 и a_3 въ зависимости отъ i, Ω и c_1. Для обратнаго опредѣленія i, Ω и c_1 въ зависимости отъ a_1, a_2 и a_3 мы можемъ написать такія формулы:

$$\left.\begin{aligned} tg\, \Omega &= -\frac{a_1}{a_2} \\ tg\, i &= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_3} \\ c_1 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

При этомъ знакъ $tg\,i$ опредѣляется знакомъ a_3, а для опредѣленія четверти, въ которой лежитъ ☊, мы должны имѣть въ виду, что sin ☊ имѣетъ такой же знакъ, какъ a_1, а cos ☊ имѣетъ знакъ, противоположный знаку a_2.

Обратимся теперь къ постоянной c_1. Мы видѣли, что c_1 можно разсматривать какъ отрѣзокъ, откладываемый на перпендикулярѣ къ плоскости движенія и опредѣляемый составляющими a_1, a_2 и a_3. Посмотримъ, нельзя ли постоянной c_1 дать другое геометрическое толкованіе. Мы имѣли:

$$dS_{yz} = \frac{1}{2}\,a_1\,dt,\quad dS_{zx} = \frac{1}{2}\,a_2\,dt,\quad dS_{xy} = \frac{1}{2}\,a_3\,dt \quad . \; . \; . \; (14)$$

Съ другой стороны, если dS есть элементарная площадь, описываемая радіусомъ r въ плоскости движенія въ безконечно-малый промежутокъ времени dt и если i_{yz}, i_{zx} и i_{xy} суть углы наклоненія плоскости движенія къ плоскостямъ координатъ YOZ, ZOX, XOY, то должны существовать такія соотношенія:

$$dS_{yz} = dS\cos i_{yz},\; dS_{zx} = dS\cos i_{zx},\; dS_{xy} = dS\cos i_{xy}.$$

Отсюда

$$dS = \sqrt{(dS_{yz})^2 + (dS_{zx})^2 + (dS_{xy})^2}.$$

Раздѣливъ обѣ части этого соотношенія на dt, получаемъ:

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dS_{yz}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dS_{zx}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dS_{xy}}{dt}\right)^2}.$$

Пользуясь уравненіями (14), имѣемъ:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}.$$

Съ другой стороны, мы видѣли, что

$$c_1 = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}.$$

Слѣдовательно, окончательно будемъ имѣть:

$$dS = \frac{1}{2}\,c_1\,dt.$$

Интегрируя это уравненіе, получаемъ

$$S = \frac{1}{2}\,c_1\,(t - t_0)\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Это соотношеніе показываетъ, что площади, описываемыя въ плоскости движенія *радіусомъ-векторомъ* r точки m_1, пропорціональны промежуткамъ времени, въ теченіе которыхъ онѣ описаны. Такимъ образомъ мы получили интегралъ площадей въ плоскости движенія точки m_1.

Если положеніе точки m_1 въ плоскости ея движенія опредѣлять полярными координатами r и θ, то этотъ интегралъ площадей можетъ быть написанъ въ видѣ:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Очевидно, что $\frac{1}{2} c_1$ есть площадь, описываемая радіусомъ-векторомъ небеснаго тѣла въ плоскости движенія въ единицу времени.

Вполнѣ понятно, что постоянная t_0, введенная интегрированіемъ, должна быть та-же самая, которая разсматривалась уже выше.

Теперь мы можемъ, привести точную формулировку перваго закона Кеплера: *Всякое небесное тѣло, обращающееся вокругъ солнца, совершаетъ свое движеніе въ плоскости, проходящей черезъ центръ солнца, и притомъ такъ, что площади, описываемыя радіусомъ-векторомъ этого тѣла въ различные промежутки времени, пропорціональны этимъ промежуткамъ.*

Замѣтимъ, что постоянными i и ☊ мы будемъ пользоваться во всемъ дальнѣйшемъ изложеніи. Постоянная же c_1 впослѣдствіи будетъ замѣнена другой.

§ 11. Интегралъ живой силы. Второй законъ Кеплера.

Теперь постараемся найти уравненіе той кривой, которую точка m описываетъ вокругъ точки m_2, иначе говоря, уравненіе, связывающее r и θ.

Для упрощенія вопроса примемъ за плоскость XOY плоскость движенія точки m_1 вокругъ точки m_2. Тогда мы будемъ имѣть только два дифференціальныхъ уравненія относительнаго движенія, а именно:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 M_{1,2} \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 M_{1,2} \frac{y}{r^3}.$$

Умножимъ первое изъ этихъ уравненій на $2\frac{dx}{dt}$, а второе на $2\frac{dy}{dt}$ и сложимъ ихъ. Тогда получимъ:

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = -2\frac{k^2 M_{1,2}}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

Но такъ какъ

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

то, беря производную отъ этого выраженія, имѣемъ

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}.$$

Поэтому, замѣчая, что лѣвая часть уравненія (17) есть производная по времени отъ двучлена

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

мы можемъ переписать это уравненіе такъ:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = -2\,\frac{k^2 M_{1,2}}{r^2}\cdot\frac{dr}{dt}.$$

Правую часть этого уравненія можемъ представить въ видѣ производной по времени отъ $\frac{1}{r}$, умноженной на $2k^2M_{1,2}$, такъ что вмѣсто предыдущаго уравненія получаемъ:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = 2k^2M_{1,2}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2 M_{1,2}}{r} + c_2, \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

гдѣ c_2 есть постоянная произвольная, введенная интегрированіемъ. Интегралъ (18) называется *интеграломъ живой силы*, такъ какъ лѣвая часть уравненія (18) есть квадратъ скорости точки m_1, а живая сила какой нибудь точки выражается полупроизведеніемъ массы этой точки на квадратъ ея скорости.

Перейдемъ теперь къ полярнымъ координатамъ при помощи уравненій

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Беря производныя, находимъ:

$$\frac{dx}{dt} = \cos\theta\,\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin\theta\,\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Поэтому

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2M_{1,2}}{r} + c_2 \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

Чтобы получить уравненіе кривой, описываемой точкой m_1 вокругъ точки m_2, мы должны изъ уравненія (19) исключить время t. Съ этою цѣлью мы примемъ въ этомъ уравненіи уголъ θ за независимую перемѣнную, а радіусъ-векторъ r будемъ разсматривать какъ функцію отъ θ, и производную $\frac{dr}{dt}$ замѣнимъ такимъ образомъ:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

Что же касается производной $\frac{d\theta}{dt}$, то ее мы исключимъ изъ уравненія (19) при помощи интеграла площадей, который имѣетъ видъ:

$$r^2\,\frac{d\theta}{dt} = c_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21)$$

На основаніи выраженій (20) и (21) получаемъ:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{c_1^{\,2}}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \text{ и } r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{c_1^{\,2}}{r^2}.$$

Послѣ этого уравненіе (19) принимаетъ такой видъ:

$$\frac{c_1^{\,2}}{r^2}\left[1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] = \frac{2k^2 M_{1,2}}{r} + c_2.$$

Или

$$\frac{c_1^{\,2}}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2k^2 M_{1,2}}{r} - \frac{c_1^{\,2}}{r^2} + c_2$$

Опредѣляя отсюда $d\theta$, находимъ:

$$d\theta = \frac{\pm c_1 dr}{r^2\sqrt{\frac{2k^2 M_{1,2}}{r} - \frac{c_1^{\,2}}{r^2} + c_2}}.$$

Это выраженіе мы можемъ переписать еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$d\theta = \frac{\mp d\left(\frac{c_1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2k^2 M_{1,2}}{r} - \frac{c_1^{\,2}}{r^2} + c_2}}.$$

Въ знаменателѣ подъ знакомъ корня прибавимъ $\frac{k^4 M^2_{1,2}}{c_1^{\,2}}$ и вычтемъ ту же величину. Тогда два первыхъ члена подъ корнемъ съ новымъ членомъ $-\frac{k^4 M^2_{1,2}}{c_1^{\,2}}$ составятъ полный квадратъ, взятый со знакомъ —, и мы будемъ имѣть:

$$d\theta = \frac{\mp d\left(\frac{c_1}{r}\right)}{\sqrt{c_2 + \frac{k^4 M^2_{1,2}}{c_1^{\,2}} - \left(\frac{k^2 M_{1,2}}{c_1} - \frac{c_1}{r}\right)^2}} \quad \ldots \ldots (22)$$

Для сокращенія письма введемъ обозначеніе

$$c_2 + \frac{k^4 M^2_{1,2}}{c_1^2} = B^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Допустить, что сумма

$$c_2 + \frac{k^4 M^2_{1,2}}{c_1^2} < 0,$$

мы не можемъ, такъ какъ тогда знаменатель въ формулѣ (22) будетъ величиной мнимой.

Затѣмъ введемъ вспомогательную перемѣнную u уравненіемъ

$$\frac{k^2 M_{1,2}}{c_1} - \frac{c_1}{r} = -u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Отсюда дифференцированіемъ получаемъ

$$d\left(\frac{c_1}{r}\right) = du.$$

Послѣ этихъ преобразованій уравненіе (22) приметъ видъ

$$d\theta = \frac{\mp du}{\sqrt{B^2 - u^2}}.$$

Или

$$d\theta = \frac{\mp d\left(\frac{u}{B}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{B}\right)^2}}.$$

Интегрируя, получаемъ:

при верхнемъ знакѣ $\qquad \frac{u}{B} = \cos(\theta - c_3),$

при нижнемъ знакѣ $\qquad \frac{u}{B} = \sin(\theta - c_3'),$

гдѣ c_3 и c_3' — постоянныя произвольныя, введенныя интегрированіемъ. Но такъ какъ мы всегда можемъ взять

$$c_3' = c_3 - \frac{\pi}{2},$$

то получаемъ такую общую формулу

$$u = B\cos(\theta - c_3).$$

Имѣя въ виду уравненія (23) и (24), находимъ:

$$\frac{c_1}{r} - \frac{k^2 M_{1,2}}{c_1} = \sqrt{c_2 + \frac{k^4 M^2_{1,2}}{c_1^{\ 2}}} \, . \cos(\theta - c_3).$$

Здѣсь передъ корнемъ собственно слѣдовало бы написать два знака, но такъ какъ, подбирая извѣстнымъ образомъ постоянную c_3, мы всегда можемъ достичь того, чтобы знакъ — передъ корнемъ во второй части измѣнился на $+$, то очевидно, что только что написанная формула является общею. Изъ этой формулы мы легко выводимъ выраженіе для r въ зависимости отъ θ, а именно:

$$r = \frac{c_1}{\frac{k^2 M_{1,2}}{c_1} + \sqrt{c_2 + \frac{k^4 M^2_{1,2}}{c_1^{\ 2}}} \, . \cos(\theta - c_3)}$$

или окончательно

$$r = \frac{\frac{c_1^{\ 2}}{k^2 M_{1,2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{c_1^{\ 2} c_2}{k^4 M^2_{1,2}}} \, . \cos(\theta - c_3)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что уравненіе (25) есть уравненіе коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ, причемъ начало координатъ совпадаетъ съ однимъ изъ *фокусовъ* коническаго сѣченія. Болѣе обычная форма уравненія коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ такова

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Здѣсь p есть *полупараметръ* коническаго сѣченія, e — *астрономическій эксцентриситетъ* и ω — уголъ между полярной осью и большой осью коническаго сѣченія. Напомнимъ, что полупараметромъ коническаго сѣченія называется длина перпендикуляра, возстановленнаго къ большой оси изъ фокуса и продолженнаго до пересѣченія съ коническимъ сѣченіемъ. Сравнивая между собой уравненія (25) и (26), мы можемъ выразить постоянныя c_1, c_2 и c_3 черезъ p, e и ω. Это сравненіе даетъ:

$$p = \frac{c_1^{\ 2}}{k^2 M_{1,2}}, \quad e^2 = 1 + \frac{c_1^{\ 2} c_2}{k^4 M^2_{1,2}}, \quad \omega = c_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Отсюда получаемъ:

$$c_1 = k \sqrt{M_{1,2}\, p}, \quad c_2 = -\frac{k^2 (1 - e^2) M_{1,2}}{p}, \quad c_3 = \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Теперь разберемъ отдѣльно различные виды коническихъ сѣченій.

Начнемъ съ *эллипса* Въ этомъ случаѣ e, а слѣдовательно и $e^2 < 1$. Значитъ, если $c_2 < 0$, то коническое сѣченіе, какъ показываетъ вторая изъ формулъ (28), есть эллипсъ. Для эллипса $p = KS = a(1 - e^2)$, гдѣ a есть *большая полуось* OP эллипса (рис. 6). На этомъ же чертежѣ разстояніе OS отъ центра эллипса O до фокуса S есть *линейный эксцентриситетъ* эллипса, причемъ

$$OS = \sqrt{a^2 - b^2},$$

гдѣ

$$b = OB$$

есть *малая полуось* эллипса. *Астрономическимъ* же *эксцентриситетомъ* e называется отношеніе $\frac{OS}{OP}$, такъ что

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

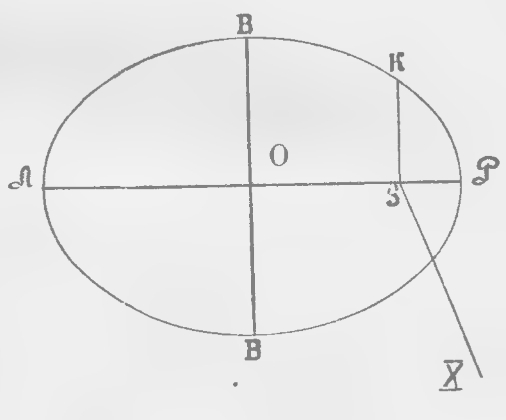


Рис. 6.

Наконецъ, ω на рис. 6 есть уголъ XSP. Когда разсматривается движеніе небеснаго тѣла m_1 вокругъ солнца, то предполагается, что въ фокусѣ S, совпадающемъ съ началомъ координатъ, находится солнце. Въ этомъ случаѣ ближайшая къ солнцу точка P эллипса называется *перигеліемъ*, а наиболѣе удаленная отъ солнца точка A эллипса носитъ названіе *афелія.*

Перейдемъ теперь къ *параболѣ*. Для параболы эксцентриситетъ $e = 1$. Значитъ и $e^2 = 1$. Поэтому, вторая изъ формулъ (28) даетъ $c_2 = 0$. Итакъ, если постоянная $c_2 = 0$, то коническое сѣченіе есть парабола. Для параболы $p = KS = 2SP = 2q$, гдѣ буквой q обозначено разстояніе вершины параболы отъ начала координатъ (рис. 7). Большая ось для параболы обращается въ безконечность, и для этого коническаго сѣченія вмѣсто двухъ постоянныхъ a и e мы имѣемъ одну, именно q. Когда разсматривается движеніе небеснаго тѣла вокругъ солнца по параболѣ, то вершина P параболы называется перигеліемъ. Въ этомъ случаѣ q есть *линейное разстояніе перигелія отъ солнца*. Что же касается афелія, то онъ для параболы удаляется въ безконечность. Наконецъ, ω для параболы, какъ и для эллипса, представляется угломъ XSP.

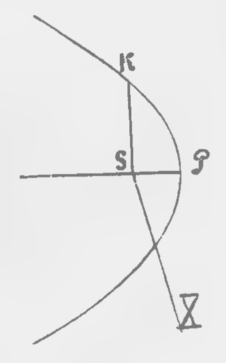


Рис. 7.

Теперь обратимся къ *гиперболѣ*. Для гиперболы e, а слѣдовательно

и $e^2 > 1$. Значитъ, если $c_2 > 0$, то коническое сѣченіе, какъ показываетъ вторая изъ формулъ (28), есть гипербола. Для гиперболы

$$p = KS = a\ (e^2 - 1),$$

гда a есть половина дѣйствительной оси PP' гиперболы (рис. 8). Далѣе,

$$OS = \sqrt{a^2 + b^2}$$

есть линейный эксцентриситетъ, причемъ $b = OB$ есть мнимая полуось гиперболы, длину которой можемъ получить, если въ вершинѣ P гиперболы возстановимъ къ дѣйствительной оси перпендикуляръ до пересѣченія съ *ассимптотой* OK гиперболы. Астрономическій эксцентриситетъ e есть отношеніе

$$\frac{OS}{OP} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

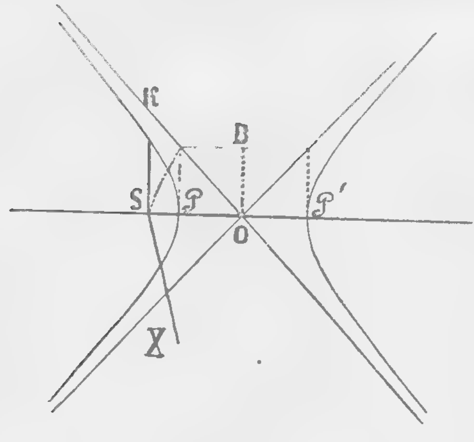


Рис. 8.

Когда разсматривается движеніе небеснаго тѣла m_1 вокругъ солнца S, то ближайшая къ солнцу точка P той вѣтви гиперболы, по которой происходитъ движеніе, называется перигеліемъ. Афелій для гиперболы находится въ безконечности. Наконецъ, ω и для гиперболы представляется угломъ XSP.

Необходимо замѣтигь, что кривыя, описываемыя небесными тѣлами вокругъ солнца, называются ихъ *орбитами*. Изъ предыдущаго мы заключаемъ, что небесныя тѣла могутъ совершать движенія вокругъ солнца по эллиптическимъ, параболическимъ и гиперболическимъ орбитамъ. По эллиптическимъ орбитамъ движутся планеты и періодическія кометы, а по параболическимъ и гиперболическимъ—неперіодическія кометы.

Послѣ всего вышеизложеннаго мы можемъ привести точную формулировку второго закона Кеплера: *Небесныя тѣла совершаютъ движенія вокругъ солнца по коническимъ сѣченіямъ, въ одномъ изъ фокусовъ которыхъ, и притомъ общемъ для всѣхъ коническихъ сѣченіи, находится солнце.*

Къ этому остается еще прибавить, что въ формулировкѣ второго закона, данной самимъ Кеплеромъ, рѣчь шла только объ эллиптическихъ орбитахъ, такъ какъ онъ вывелъ свои законы изъ наблюденій Тихо-Браге надъ планетой Марсомъ. Теорія же, естественно, даетъ этотъ законъ въ общемъ видѣ.

Вспоминая дифференціальныя уравненія ($6'''$) и (6^{IV}) относительнаго движенія точекъ m_1 и m_2 по отношенію къ ихъ общему центру инерціи и имѣя въ виду результаты, полученные въ этомъ параграфѣ, мы легко убѣждаемся, что обѣ точки описываютъ вокругъ ихъ центра инерціи тоже коническія сѣченія.

Въ заключеніе этого параграфа сдѣлаемъ краткій обзоръ всего того, что нами сдѣлано до сихъ поръ. Относительное движеніе небеснаго тѣла m_1 вокругъ солнца m_2 опредѣляется тремя обыкновенными дифференціальными уравненіями (8) второго порядка. Проинтегрировать эти уравненія значитъ найти координаты x, y, z въ зависимости отъ времени t и шести постоянныхъ произвольныхъ. Однако полученіе координатъ въ видѣ явныхъ функцій времени невозможно. Поэтому мы принялись за рѣшеніе задачи иначе и занялись изслѣдованіемъ законовъ движенія. Прежде всего мы убѣдились въ томъ, что движеніе небеснаго тѣла вокругъ солнца происходитъ въ плоскости, проходящей черезъ центръ солнца. Положеніе этой плоскости опредѣляется двумя постоянными i и Ω. Далѣе, пользуясь интеграломъ живой силы и интеграломъ площадей, мы убѣдились въ томъ, что движеніе небесныхъ тѣлъ вокругъ солнца происходитъ по коническимъ сѣченіямъ. Видъ, размѣры и положеніе коническаго сѣченія въ плоскости движенія опредѣляются тремя постоянными произвольными c_1, c_2, c_3. Эти постоянныя могутъ быть замѣнены другими, обыкновенно и употребляющимися въ астрономіи. Для эллиптической и гиперболической орбитъ эти постоянныя замѣняются полупараметромъ p, эксцентриситетомъ e и угломъ ω, дающимъ оріентировку коническаго сѣченія въ его плоскости. Полупараметръ p часто замѣняется большою полуосью

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

въ случаѣ эллиптической орбиты и половиной дѣйствительной оси

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}$$

въ случаѣ гиперболической орбиты. Для параболической орбиты эксцентриситетъ равенъ единицѣ, а вмѣсто полупараметра p вводится въ разсмотрѣніе линейное разстояніе перигелія отъ солнца

$$q = \frac{p}{2}.$$

Разъ опредѣлены положеніе плоскости орбиты небеснаго тѣла въ пространствѣ, а также видъ, размѣры и расположеніе орбиты въ ея плос-

кости, то для полнаго рѣшенія задачи остается еще опредѣлить движеніе небеснаго тѣла по его орбитѣ. Для этой цѣли служитъ интегралъ площадей въ плоскости орбиты, имѣющій видъ:

$$S = \frac{1}{2} c_1 (t - t_0),$$

гдѣ t_0 есть шестая постоянная произвольная. Такъ какъ

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta,$$

то этому интегралу мы можемъ придать видъ

$$\int r^2 d\theta = c_1 (t - t_0).$$

Указанное въ лѣвой части этого уравненія интегрированіе мы будемъ производить въ послѣдующихъ главахъ отдѣльно для эллиптической, параболической и гиперболической орбитъ. А теперь займемся изученіемъ нѣкоторыхъ свойствъ движеній небесныхъ тѣлъ и выводомъ третьяго закона Кеплера, устанавливающаго зависимость между движеніями различныхъ небесныхъ тѣлъ вокругъ солнца.

§ 12. Нѣкоторыя свойства движеній небесныхъ тѣлъ вокругъ солнца.

Обратимся къ интегралу живой силы:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2 M_{1,2}}{r} + c_2$$

и вмѣсто постоянной c_2 подставимъ ея выраженіе (28).

Помня, что для эллиптической орбиты

$$p = a (1 - e^2)$$

и для гиперболической

$$p = a (e^2 - 1),$$

получаемъ

$$c_2 = \mp \frac{k^2 M_{1,2}}{a},$$

гдѣ знакъ — относится къ случаю эллиптической, а знакъ + къ случаю гиперболической орбиты. Поэтому, если двучленъ

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

замѣнить квадратомъ скорости V^2, то интегралъ живой силы приметъ слѣдующій видъ:

$$V^2 = k^2 M_{1,2}\left(\frac{2}{r} \mp \frac{1}{a}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots (29)$$

Примѣняя выраженіе (29) къ начальному моменту, для котораго

$$V = V_0 \quad \text{и} \quad r = r_0,$$

получаемъ

$$V_0^2 = k^2 M_{1,2}\left(\frac{2}{r_0} \mp \frac{1}{a}\right).$$

Опредѣляя отсюда a, находимъ

$$a = \pm \frac{k^2 M_{1,2}}{\dfrac{2k^2 M_{1,2}}{r_0} - V_0^2}, \ldots \ldots \ldots \ldots (30)$$

гдѣ знакъ + относится къ случаю эллиптической, а знакъ — къ случаю гиперболической орбиты.

Слѣдовательно, мы можемъ высказать такое положеніе: *Большая полуось орбиты зависитъ отъ начальнаго разстоянія небеснаго тѣла отъ солнца и отъ начальной его скорости, но не зависитъ отъ направленія этой скорости.*

Кромѣ того по начальнымъ обстоятельствамъ мы можемъ опредѣлить родъ коническаго сѣченія, по которому будетъ двигаться небесное тѣло.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ непремѣнно должно быть $a > 0$, то движеніе будетъ происходить по эллиптической орбитѣ, если

$$V_0^2 < \frac{2k^2 M_{1,2}}{r_0},$$

и по гиперболической, если

$$V_0^2 > \frac{2k^2 M_{1,2}}{r_0}.$$

Далѣе, такъ какъ параболическая орбита получается изъ эллиптической, если большая полуось a, постоянно увеличиваясь, обращается въ безконечность, то при

$$V_0^2 = \frac{2k^2 M_{1,2}}{r_0}$$

движеніе небеснаго тѣла будетъ происходить по параболической орбитѣ.

Допустимъ теперь, что движеніе небеснаго тѣла происходитъ по круговой орбитѣ, которая есть частный случай эллиптической орбиты. Для этого частнаго случая всегда $r = a$. Поэтому, если буквой V_c обозначимъ скорость движенія небеснаго тѣла по круговой орбитѣ, то, прене-

брегая массой небеснаго тѣла въ сравненіи съ массой солнца, легко найдемъ:

$$V_c^2 = \frac{k^2 m_2}{r} \dots \dots \dots \dots (31)$$

Называя буквой V_p скорость движенія небеснаго тѣла по параболической орбитѣ на томъ же самомъ разстояніи r отъ солнца и опять пренебрегая массой небеснаго тѣла въ сравненіи съ массой солнца, мы будемъ имѣть

$$V_p^2 = \frac{2k^2 m_2}{r} \dots \dots \dots \dots (32)$$

Сравненіе выраженій (31) и (32) между собой даетъ

$$\frac{V_p}{V_c} = \sqrt{2} = 1,414 \dots$$

Такъ какъ эллиптическія орбиты, описываемыя большими планетами вокругъ солнца, обладаютъ малыми эксцентриситетами, т. е. мало отличаются отъ круговыхъ орбитъ, то по послѣдней формулѣ можетъ быть вычислена скорость движенія кометы или метеорнаго потока, двигающихся по параболическимъ орбитамъ, для того момента, когда они пересѣкаютъ орбиту какой-нибудь планеты.

Покажемъ теперь, что *эксцентриситетъ орбиты и ея расположеніе въ плоскости движенія опредѣляются не только начальнымъ разстояніемъ отъ солнца и начальною скоростью, но также и направленіемъ начальной скорости.* Для доказательства обратимся къ рис. 9. На этомъ рисункѣ SP есть радіусъ-векторъ r небеснаго тѣла, а PV есть элементъ пути ds, проходимый тѣломъ въ безконечно-малый промежутокъ времени dt. Этотъ элементъ ds мы можемъ считать прямолинейнымъ. Разложимъ этотъ элементъ на двѣ составляющихъ: одну PA по направленію перпендикулярному къ радіусу-вектору и другую AV по направленію радіуса-вектора. Называя уголъ AVP буквой η, получаемъ:

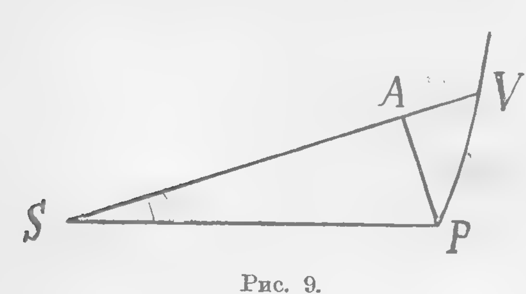


Рис. 9.

$$VA = ds \cos \eta, \quad PA = ds \sin \eta.$$

Отрѣзокъ VA мы можемъ разсматривать, какъ дифференціалъ dr радіуса-вектора, а отрѣзокъ PA, какъ дугу радіуса $PS = r$, соотвѣтствующую углу $d\theta$, такъ что

$$PA = r d\theta.$$

Поэтому будемъ имѣть:

$$dr = ds\cos\eta, \quad rd\theta = ds\sin\eta.$$

Раздѣляя оба эти равенства на dt и замѣчая, что $\frac{ds}{dt}$ есть скорость небеснаго тѣла V, находимъ:

$$\frac{dr}{dt} = V\cos\eta, \quad r\frac{d\theta}{dt} = V\sin\eta.$$

Эти равенства мы можемъ переписать такъ:

$$\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = V\cos\eta, \quad r\frac{d\theta}{dt} = V\sin\eta.$$

Замѣняя $\frac{d\theta}{dt}$ на основаніи интеграла площадей равной ему величиной $\frac{c_1}{r^2}$, находимъ:

$$\frac{c_1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = V\cos\eta \text{ и } \frac{c_1}{r} = V\sin\eta.$$

Помня, что

$$c_1 = k\sqrt{M_{1,2}p},$$

будемъ имѣть:

$$-k\sqrt{M_{1,2}p}\,\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = V\cos\eta \text{ и } \frac{k\sqrt{M_{1,2}p}}{r} = V\sin\eta.$$

Уравненіе орбиты

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\omega)}$$

намъ даетъ:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\theta-\omega).$$

Послѣ дифференцированія по θ получаемъ:

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = -\frac{e}{p}\sin(\theta-\omega).$$

Поэтому предыдущія уравненія можемъ переписать въ видѣ:

$$\frac{k\sqrt{M_{1,2}}}{\sqrt{p}}\,e\sin(\theta-\omega) = V\cos\eta \text{ и } \frac{k\sqrt{M_{1,2}}}{\sqrt{p}}\,[1+e\cos(\theta-\omega)] = V\sin\eta.$$

Замѣчая, что по уравненію

$$\frac{k\sqrt{M_{1,2}p}}{r} = V\sin\eta$$

выходитъ

$$\sqrt{p} = \frac{Vr}{k\sqrt{M_{1,2}}} \sin\eta,$$

окончательно находимъ:

$$e \sin(\theta - \omega) = \frac{V^2 r}{k^2 M_{1,2}} \cos\eta \sin\eta \quad \text{и} \quad e \cos(\theta - \omega) = \frac{V^2 r}{k^2 M_{1,2}} \sin^2\eta - 1.$$

Примѣняя эти уравненія къ начальному моменту, будемъ имѣть:

$$e \sin(\theta_0 - \omega) = \frac{V_0^{\,2} r_0}{k^2 M_{1,2}} \cos\eta_0 \sin\eta_0 \quad \text{и} \quad e \cos(\theta_0 - \omega) = \frac{V_0^{\,2} r_0}{k^2 M_{1,2}} \sin^2\eta_0 - 1.$$

Эти соотношенія показываютъ, что e и ω зависятъ не только отъ V_0 и r_0, но также и отъ η_0.

Положимъ теперь, что данное небесное тѣло описываетъ вокругъ солнца эллиптическую орбиту.

Обратимся къ выраженію (15) и примемъ въ немъ

$$t - t_0 = P_{1,2},$$

гдѣ $P_{1,2}$ есть время полнаго обращенія небеснаго тѣла вокругъ солнца, т. е. время такъ называемаго *звѣзднаго* или *сидерическаго* оборота. Тогда соотвѣтственная площадь S должна быть равна площади цѣлаго эллипса, т. е.

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}.$$

Слѣдовательно, мы имѣемъ:

$$P_{1,2} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{c_1}.$$

Но мы знаемъ, что для эллипса

$$c_1 = k\sqrt{M_{1,2}\, a\, (1 - e^2)}.$$

Поэтому

$$P_{1,2} = \frac{2\pi a^{3/2}}{k\sqrt{M_{1,2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Изъ формулъ (33) и (30) слѣдуетъ, что *время полнаго обращенія небеснаго тѣла вокругъ солнца, какъ и большая полуось, зависитъ отъ начальнаго разстоянія этого тѣла отъ солнца и отъ начальной его скорости, но не зависитъ отъ направленія этой скорости.*

Такъ, на рис. 10 три орбиты имѣютъ одну и ту же величину большой оси, и слѣдовательно время обращенія небесныхъ тѣлъ по этимъ орбитамъ одно и то же. Объясняется это тѣмъ, что начальная скорость въ точкѣ A во всѣхъ трехъ случаяхъ одна и та же. Различіе же въ направленіи начальныхъ скоростей во всѣхъ трехъ случаяхъ вызываетъ различіе въ расположеніи и въ формѣ эллипсовъ.

Изъ механики извѣстно, что направленіе скорости во всякой точкѣ траекторіи должно быть перпендикулярно къ направленію нормали къ траекторіи въ той же точкѣ. Для окружности круга нормаль во всякой точкѣ совпадаетъ съ радіусомъ окружности. Поэтому, для круговой орбиты небеснаго тѣла направленіе скорости всегда должно быть перпендикулярно къ радіусу орбиты, т. е. къ разстоянію, отдѣляющему небесное тѣло отъ солнца. Выше было показано, что если орбита тѣла есть окружность круга, то скорость должна удовлетворять условію

$$V^2 = \frac{k^2 M_{1,2}}{r}.$$

Это условіе необходимое, но не достаточное, такъ какъ при скорости, удовлетворяющей условію

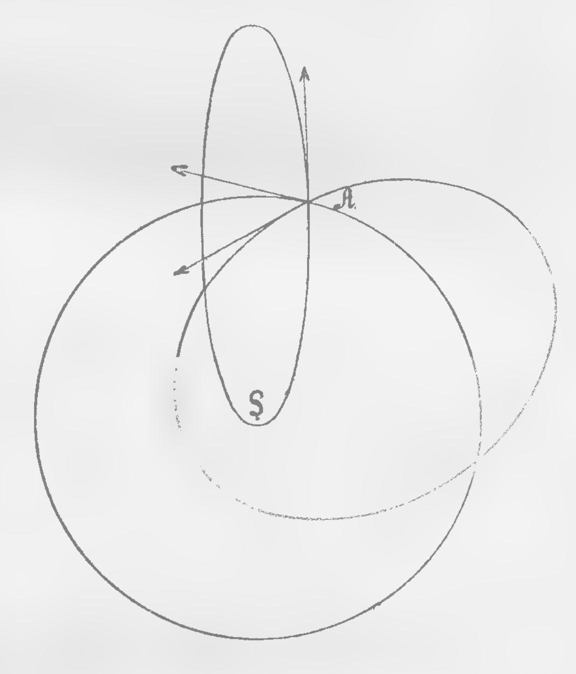


Рис. 10.

$$V^2 = \frac{k^2 M_{1,2}}{r},$$

движеніе можетъ происходить и по эллипсу: именно такимъ образомъ выражается скорость небеснаго тѣла, когда оно находится на концахъ малой полуоси, такъ какъ въ этомъ случаѣ $r = a$. Чтобы при скорости, удовлетворяющеи этому условію, движеніе происходило по окружности круга, направленіе этой скорости непремѣнно должно быть перпендикулярно къ радіусу-вектору r.

§ 13. Третій законъ Кеплера.

Приступимъ теперь къ выводу третьяго закона Кеплера, который объединяетъ различныя небесныя тѣла, обращающіяся вокругъ солнца, въ одну систему. Разсмотримъ съ одной стороны движеніе точки m_1 вокругъ m_2, съ другой стороны—движеніе точки m_3 вокругъ m_2 и выра-

зимъ по формулѣ (33) времена обращенія точекъ m_1 и m_3 вокругъ m_2. Мы будемъ имѣть:

$$P_{1,2} = \frac{2\pi a_{1,2}^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{M_{1,2}}}, \qquad P_{3,2} = \frac{2\pi a_{3,2}^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{M_{3,2}}}.$$

Здѣсь $P_{1,2}$ и $P_{3,2}$ суть времена обращенія небесныхъ тѣлъ m_1 и m_3 при ихъ движеніи вокругъ солнца m_2; $a_{1,2}$ и $a_{3,2}$ суть большія полуоси эллиптическихъ орбитъ, описываемыхъ тѣлами m_1 и m_3 вокругъ солнца; далѣе, имѣемъ

$$M_{1,2} = m_1 + m_2, \quad M_{3,2} = m_3 + m_2.$$

Возвышая $P_{1,2}$ и $P_{3,2}$ въ квадратъ и беря отношеніе квадратовъ временъ обращенія, получаемъ:

$$\frac{P^2_{1,2}}{P^2_{3,2}} = \frac{a^3_{1,2}}{a^3_{3,2}} \cdot \frac{M_{3,2}}{M_{1,2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Уравненіемъ (34) и выражается точный третій законъ Кеплера. Обычно однако подъ названіемъ третьяго закона Кеплера разумѣется не законъ, выражаемый уравненіемъ (34), а приближенный законъ, получаемый изъ уравненія (34) при извѣстныхъ допущеніяхъ. Также и самъ Кеплеръ вывелъ изъ наблюденій Тихо-Браге лишь приближенный законъ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы разсматриваемъ небесныя тѣла, принадлежащія къ нашей солнечной системѣ, то мы можемъ пренебрегать массами этихъ небесныхъ тѣлъ въ сравненіи съ массой солнца, такъ какъ масса самой могущественной планеты въ нашей солнечной системѣ—Юпитера въ 1000 слишкомъ разъ меньше массы солнца. На этомъ основаніи мы можемъ принять

$$M_{3,2} = M_{1,2} = m_2 .$$

Въ такомъ случаѣ уравненіе (34) обращается въ такое:

$$\frac{P^2_{1,2}}{P^2_{3,2}} = \frac{a^3_{1,2}}{a^3_{3,2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Имѣя въ виду уравненіе (35), мы можемъ третій законъ Кеплера формулировать такъ: *Квадраты сидерическихъ временъ обращенія небесныхъ тѣлъ вокругъ солнца относятся между собою, какъ кубы большихъ полуосей орбитъ этихъ тѣлъ.*

Само собой разумѣется, что этотъ законъ относится къ орбитамъ эллиптическимъ.

Замѣтимъ, что большія полуоси эллиптическихъ орбитъ, описываемыхъ небесными тѣлами вокругъ солнца, очень часто называются *средними разстояніями* этихъ тѣлъ отъ солнца.

Точное выраженіе третьяго закона Кеплера можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{a^3_{1,2}}{P^2_{1,2}\, M_{1,2}} = \frac{a^3_{3,2}}{P^2_{3,2}\, M_{3,2}}.$$

Такимъ образомъ для всякаго небеснаго тѣла, движущагося вокругъ солнца по эллиптической орбитѣ, *кубъ большой полуоси орбиты, раздѣленный на квадратъ сидерическаго времени обращенія небеснаго тѣла и на сумму массъ солнца и небеснаго тѣла, есть величина постоянная или такъ называемый инваріантъ.*

Третій законъ Кеплера, представленный въ такомъ видѣ, можетъ быть обобщенъ для какихъ угодно орбитъ. Возьмемъ выраженіе постоянной c_1

$$c_1 = k\sqrt{M_{1,2}\, p_{1,2}}\,.$$

Извѣстно, что c_1 представляетъ удвоенную площадь, описываемую въ единицу времени радіусомъ-векторомъ небеснаго тѣла. Слѣдовательно

$$\nu = \frac{1}{2}\, c_1$$

есть такъ называемая *секторіальная скорость* этого тѣла.

Очевидно, что для секторіальной скорости мы можемъ написать такое выраженіе

$$\nu = \frac{k\sqrt{M_{1,2}\; p_{1,2}}}{2}.$$

Отсюда легко получаемъ:

$$\frac{\nu^2}{M_{1,2}\; p_{1,2}} = \frac{k^2}{4}.$$

Слѣдовательно, *квадратъ секторіальной скорости, раздѣленный на сумму массъ солнца и небеснаго тѣла и на полупараметръ орбиты, описываемой этимъ тѣломъ вокругъ солнца, есть величина постоянная для всѣхъ небесныхъ тѣлъ* (*инваріантъ*).

Это собственно и есть третій законъ Кеплера въ наиболѣе общемъ видѣ.

Отсюда, пользуясь соотношеніемъ (33), безъ труда получаемъ инваріантъ для небесныхъ тѣлъ, движущихся по эллиптическимъ орбитамъ.

§ 14. Гауссова постоянная.

Въ формулу (33), по которой опредѣляется время полнаго обращенія небеснаго тѣла вокругъ солнца, входитъ постоянная k. Если мы выберемъ единицы массы, разстоянія и времени, то мы можемъ вычислить

постоянную k относительно этой системы единицъ. Гауссъ въ своемъ знаменитомъ сочиненіи «Theoria motus corporum coelestium etc.» вычислилъ k, принявъ за единицу массы массу солнца, за единицу разстоянія большую полуось земной орбиты и за единицу времени среднія солнечныя сутки. Полученное имъ численное значеніе постоянной k называется *Гауссовой постоянной.*

Именно, подставляя числа

$$a_{1,2} = 1, \quad m_1 = \frac{1}{354710}, \quad m_2 = 1, \quad P_{1,2} = 365{,}2563835,$$

относящіяся къ землѣ, въ выраженіе

$$k = \frac{2\pi a_{1,2}^{\frac{3}{2}}}{P_{1,2}\sqrt{M_{1,2}}},$$

получаемое изъ уравненія (33), Гауссъ нашелъ:

$$k = 0{,}01720209895$$

$$\log k = 8{,}2355814414.$$

Въ сущности величину постоянной k мы должны были бы мѣнять по мѣрѣ полученія болѣе точныхъ значеній величинъ $P_{1,2}$ и m_1. Однако на практикѣ удобнѣе сохранять для k значеніе, найденное Гауссомъ. Это равносильно тому, что среднее разстояніе отъ земли до солнца мы опредѣляемъ по формулѣ

$$a_{1,2} = \left(\frac{k\, P_{1,2}\sqrt{M_{1,2}}}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Такое значеніе $a_{1,2}$ чрезвычайно мало отличается отъ единицы, именно въ $\log a_{1,2}$ первая значащая цифра появляется лишь въ восьмомъ десятичномъ знакѣ.

УПРАЖНЕНІЯ.

Задача № 1. Нѣкоторое небесное тѣло при своемъ движеніи вокругъ солнца проходитъ въ секунду 33,2 километра, причемъ въ это время радіусъ-векторъ тѣла равенъ 0,7184 въ такъ называемыхъ астрономическихъ единицахъ, т. е., если за единицу разстояній принять среднее разстояніе отъ земли до солнца. Опредѣлить видъ коническаго сѣченія, описываемаго тѣломъ вокругъ солнца, если масса тѣла равна $\frac{1}{408000}$ массы солнца.

Рѣшеніе. Сначала вычислимъ скорость тѣла не въ километрахъ, а въ астрономическихъ единицахъ, и притомъ не въ секунду времени, а въ однѣ среднія сутки (86400 секундъ). Зная, что большая полуось земной орбиты равна 148630000 кил., можемъ написать для скорости V разсматриваемаго небеснаго тѣла такое выраженіе:

$$V = \frac{33,2 \times 86400}{148630000}.$$

Пользуясь при вычисленіи четырехзначными логариѳмами, получаемъ

$$\log V = 8,2856.$$

Слѣдовательно, имѣемъ

$$\log V^2 = 6,5712$$

и

$$V^2 = 0,000373.$$

Эту величину V^2 надо сравнить съ величиной $\frac{2k^2M_{1,2}}{r}$, причемъ $\log k$ надо взять равнымъ 8,2356. Вычисленія даютъ:

$\log 2k^2$	6,7722	$\log \frac{2k^2 M_{1,2}}{r}$	6,9159
$\log M_{1,2}$	0,0000		
доп. $\log r$	0,1437	$\frac{2k^2 M_{1,2}}{r}$	0,000824.

Такъ какъ V^2 въ данномъ случаѣ меньше, чѣмъ $\frac{2k^2M_{1,2}}{r}$, то движеніе небеснаго тѣла происходитъ по эллиптической орбитѣ. Въ этой задачѣ дѣло идетъ о движеніи планеты Венеры.

Задача № 2. Комета, масса которой ничтожна въ сравненіи съ массой солнца, движется вокругъ этого послѣдняго со скоростью 562,12 километровъ въ секунду. Радіусъ-векторъ кометы въ это время равенъ 0,005543 въ астрономическихъ единицахъ. Опредѣлить, какого рода коническое сѣченіе описываетъ вокругъ солнца эта комета.

Рѣшеніе. При рѣшеніи этой задачи будемъ пользоваться пятизначными логариѳмами. Прежде всего вычислимъ скорость V кометы въ однѣ среднія сутки и выразимъ ее въ астрономическихъ единицахъ. Имѣемъ:

$$V = \frac{562,12 \times 86400}{148630000}.$$

Отсюда находимъ

$$\log V = 9,51423, \quad \log V^2 = 9,02846$$

и

$$V^2 = 0,10677.$$

Эту величину V^2, какъ и въ предыдущей задачѣ, мы должны сравнить съ величиной $\frac{2k^2 M_{1,2}}{r}$, причемъ надо взять

$$log\, k = 8{,}23558.$$

Вычисленія даютъ:

$log\, 2k^2$	6,77219	$log\, \frac{2k^2 M_{1,2}}{r}$	9,02845
$log\, M_{1,2}$	0,00000		
доп. $log\, r$	2.25626	$\frac{2k^2 M_{1,2}}{r}$	0,10677.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$V^2 = \frac{2k^2 M_{1,2}}{r},$$

то движеніе кометы происходитъ по параболической орбитѣ.

Если бы скорость кометы увеличилась всего только на 0,05 килом. и сдѣлалась равной 562,17 килом. въ секунду, то комета двигалась бы по гиперболической орбитѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, тогда мы нашли бы

$$log\, V = 9{,}51427, \quad log\, V^2 = 9{,}02854 \quad \text{и} \quad V^2 = 0{,}10679.$$

Слѣдовательно V^2 было бы больше $\frac{2k^2 M_{1,2}}{r}$.

Задача № 3. Положимъ, что земля движется вокругъ солнца по круговой орбитѣ со скоростью 29,8 километровъ въ секунду, и что къ землѣ приближается метеорный потокъ по параболической орбитѣ. Опредѣлить, между какими предѣлами будетъ заключаться относительная скорость метеоровъ по отношенію къ землѣ, когда они пролетаютъ черезъ земную атмосферу.

Рѣшеніе. Абсолютную скорость V_p метеорнаго потока при его встрѣчѣ съ землею вычислимъ по формулѣ

$$V_p = V_c \sqrt{2},$$

гдѣ V_c есть скорость земли. Имѣемъ

$$V_p = 42{,}1 \text{ кил. въ сек.}$$

Предѣлы относительной скорости метеоровъ суть ихъ относительныя скорости для тѣхъ случаевъ, когда метеоры и земля движутся по одному и тому же направленію и когда метеоры движутся на встрѣчу землѣ. Въ первомъ случаѣ получается нижній предѣлъ, именно:

$$42{,}1 \text{ кил.} - 29{,}8 \text{ кил.} = 12{,}3 \text{ кил.}$$

Во второмъ случаѣ имѣемъ верхній предѣлъ, именно:

42,1 кил. + 29,8 кил. = 71,9 кил.

Задача № 4. Пользуясь пятизначными логариѳмами, провѣрить третій законъ Кеплера на численномъ примѣрѣ по отношенію къ планетамъ Марсу и Сатурну. Для Марса имѣемъ:

$$a = 1{,}52369 \text{ астр. ед.},$$

$$P = 686{,}980 \text{ сред. сут.},$$

$$m = \frac{1}{3104700} \text{ массы солнца;}$$

для Сатурна:

$$a = 9{,}53885 \text{ астр. ед.},$$

$$P = 10759{,}23 \text{ сред. сут.},$$

$$m = \frac{1}{3486{,}5} \text{ массы солнца.}$$

Рѣшеніе. Третій законъ Кеплера мы можемъ выразить такъ:

$$\frac{a_{1,2}^{3/2}}{P_{1,2}\sqrt{1+m_1}} = \frac{a_{3,2}^{3/2}}{P_{3,2}\sqrt{1+m_3}},$$

причемъ лѣвая часть равенства относится, напр., къ Марсу, а правая къ Сатурну. Производимъ указанныя предыдущей формулой вычисленія:

$\log a$	0,18289	0,97949	$\log \frac{a^{3/2}}{P}$	7,43739	7,43746
$\log a^3$	0,54867	2,93847	$\log \frac{1}{m}$	6,49202	3,54239
			$\log (1+m)$	0,00000	0,00013
$\log a^{3/2}$	0,27434	1,46924	$\log \sqrt{1+m}$	0,00000	0,00007
$\log P$	2,83695	4,03178	$\log \frac{a^{3/2}}{P\sqrt{1+m}}$	7,43739	7,43739

Такимъ образомъ и для Марса, и для Сатурна величина $\frac{a^{3/2}}{P\sqrt{1+m}}$ получается одинаковой. О степени точности приближеннаго третьяго

закона Кеплера можемъ судить по тому, насколько величина $\frac{a^{3/2}}{P}$ для Марса отличается отъ той же величины для Сатурна.

Задача № 5. Вычислить, пользуясь пятизначными логариѳмами, постоянную k, примѣняя формулу:

$$k = \frac{2\pi a_{1,2}^{3/2}}{P_{1,2}\sqrt{M_{1,2}}}$$

къ Юпитеру и принявъ $a_{1,2} = 5{,}2028$ въ астрономическихъ единицахъ, $P_{1,2} = 4332{,}59$ среднихъ сутокъ и $m_1 = \frac{1}{1047{,}35}$ въ единицахъ солнечной массы.

Рѣшеніе.

$\log a$	0,71623	$\log 2\pi$	0,79818
$\log a^3$	2,14869	$\log a^{3/2}$	1,07435
$\log \frac{1}{m}$	3,02009	$\log$ числ.	1,87253
		$\log$ знам.	3,63695
$\log (1 + m)$	0,00041	$\log k$	8,23558
$\log P$	3,63675	k	0,017202
$\log \sqrt{M_{1,2}}$	0,00020		

Задача № 6. Вычислить, пользуясь пятизначными логариѳмами, постоянную k, примѣняя формулу

$$k = \frac{2\pi a_{1,2}^{3/2}}{P_{1,2}\sqrt{M_{1,2}}}$$

къ землѣ и къ Юпитеру, и принимая за единицу разстоянія километръ, за единицу времени продолжительность сидерическаго обращенія земли вокругъ солнца и за единицу массы массу солнца. При этомъ дано, что большая полуось земной орбиты равна 148630000 кил., большая полуось орбиты Юпитера — 773280000 кил.; сидерическое время обращенія земли содержитъ 365,2564 средн. сут., сидерическое время обращенія Юпитера—4332,59 средн. сут.; масса земли равна $\frac{1}{354710}$ и масса Юпитера $\frac{1}{1047{,}35}$ массы солнца.

Рѣшеніе. Большія полуоси и массы уже выражены въ требуемыхъ единицахъ. Время оборота земли надо принять за единицу.

Время оборота Юпитера въ такомъ случаѣ будетъ равно

$$\frac{4332{,}59}{365.2564} = 11{,}862.$$

Послѣ этого производимъ вычисленія, какъ показано ниже:

	Земля.	Юпитеръ.		Земля.	Юпитеръ.
$log\, a$	8,17211	8,88834	$log\, \frac{a^{3/2}}{10^{10}}$	2,25816	3,33251
$log\, \frac{a^3}{10^{20}}$	4,51633	6,66502	$log\, \frac{\text{числ.}}{10^{10}}$	3,05634	4,13069
$log\, \frac{1}{m}$	5,54987	3,02009	log знам.	0,00000	1,07435
$log\,(1 + m)$	0,00000	0,00041	$log\, \frac{k}{10^{10}}$	3,05634	3,05634
$log\, P$	0,00000	1,07415			
$log\, \sqrt{M_{1,2}}$	0,00000	0,00020	$\frac{k}{10^{10}}$	1138,5	1138,5.

ГЛАВА III.

Выводъ закона Ньютона изъ законовъ Кеплера.

§ 15. Законъ Ньютона.

Мы видѣли, что въ томъ случаѣ, когда два небесныхъ тѣла m_1 и m_2 взаимно притягиваются по закону Ньютона, тѣло m_1 въ своемъ относительномъ движенiи по отношенiю къ тѣлу m_2 подчиняется тремъ законамъ Кеплера. Безъ сомнѣнiя, большой интересъ представляетъ также рѣшенiе обратной задачи, а именно: при какихъ силахъ, дѣйствующихъ между тѣлами m_1 и m_2, относительное движенiе тѣла m_1 вокругъ тѣла m_2 совершается по законамъ Кеплера? Быть можетъ, эти законы имѣютъ мѣсто также при силѣ, дѣйствующей по какому-нибудь иному закону, отличному отъ закона Ньютона.

Къ рѣшенiю этой обратнои задачи мы и приступимъ, причемъ тѣла m_1 и m_2 опять замѣнимъ матерiальными точками. Кромѣ того подъ точкой m_2 мы будемъ разумѣть солнце, а подъ точкой m_1 — планету или комету. Итакъ положимъ, что относительное движенiе точки m_1 по отношенiю къ точкѣ m_2 подчиняется слѣдующимъ тремъ законамъ:

1) Движенiе точки m_1 происходитъ въ плоскости, проходящей черезъ точку m_2, и притомъ такъ, что площади, описываемыя радiусомъ-векторомъ точки m_1 въ различные промежутки времени, пропорцiональны этимъ промежуткамъ.

Если ту плоскость, въ которой на основанiи первой половины закона происходитъ движенiе тѣла m_1, примемъ за плоскость XOY, то вторая половина закона выразится уравненiемъ:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_1 \quad \text{. . . . .} \quad (36)$$

Въ полярныхъ координатахъ это уравненiе имѣетъ видъ:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c_1 \quad \text{. . . . .} \quad (37)$$

2) Точка m_1 движется вокругъ точки m_2 по коническому сѣченію, въ одномъ изъ фокусовъ котораго находится точка m_2.

Этотъ законъ выражается слѣдующимъ уравненіемъ коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ съ началомъ координатъ въ фокусѣ:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

При этомъ для эллипса эксцентриситетъ $e < 1$ и полупараметръ

$$p = a(1 - e^2),$$

гдѣ a — большая полуось эллипса; для параболы

$$e = 1 \quad \text{и} \quad p = 2q,$$

гдѣ q — разстояніе перигелія отъ солнца; для гиперболы

$$e > 1 \quad \text{и} \quad p = a(e^2 - 1),$$

гдѣ a — половина дѣйствительной оси гиперболы.

3) Квадраты временъ обращенія небесныхъ тѣлъ, движущихся вокругъ солнца по эллиптическимъ орбитамъ, относятся между собою, какъ кубы большихъ полуосей ихъ орбитъ. Этотъ законъ выражается уравненіемъ:

$$\frac{P^2_{1,2}}{P^2_{3,2}} = \frac{a^3_{1,2}}{a^3_{3,2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Мы знаемъ, что этотъ законъ есть законъ приближенный. Точно этотъ третій законъ выражается такимъ уравненіемъ:

$$\frac{a^3_{1,2}}{P^2_{1,2} M_{1,2}} = \frac{a^3_{3,2}}{P^2_{3,2} M_{3,2}}$$

гдѣ

$$M_{3,2} = m_3 + m_2 \quad \text{и} \quad M_{1,2} = m_1 + m_2,$$

причемъ отношеніе $\frac{M_{3,2}}{M_{1,2}}$ весьма близко къ единицѣ.

По отношенію къ какимъ угодно небеснымъ тѣламъ третій законъ можетъ быть написанъ такъ:

$$\frac{\nu^2}{M_{1,2}\, p_{1,2}} = \frac{k^2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Исходя изъ этихъ трехъ законовъ, будемъ искать выраженіе силы F_1, подъ вліяніемъ которой происходитъ движеніе точки m_1 вокругъ начала координатъ, иначе говоря относительное движеніе точки m_1 вокругъ точки m_2. Плоскость, въ которой происходитъ движеніе точки m_1, мы принимаемъ, какъ уже сказано выше, за плоскость XOY. Обозначая буквами X и Y проекціи силы F_1 на оси координатъ, мы напишемъ

дифференціальныя уравненія относительнаго движенія точки m_1 въ такомъ видѣ:

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m_1 \frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Умножимъ второе уравненіе на x, а первое на $-y$ и сложимъ ихъ. Тогда будемъ имѣть:

$$m_1 \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = xY - yX.$$

Это уравненіе можемъ переписать такъ

$$xY - yX = m_1 \frac{d}{dt} \left[x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right].$$

Имѣя въ виду уравненіе (36), находимъ:

$$xY - yX = 0.$$

Это уравненіе переписываемъ такъ:

$$\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}.$$

Это уравненіе показываетъ, что направленіе силы F_1 или совпадаетъ съ направленіемъ радіуса-вектора или діаметрально противоположно этому направленію, иначе говоря, что сила F_1 есть сила центральная, причемъ въ первомъ случаѣ она будетъ сила отталкивательная, а во второмъ—притягательная.

Помножимъ, далѣе, первое изъ уравненій (41) на $\frac{dx}{dt}$, а второе на $\frac{dy}{dt}$ и сложимъ ихъ. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$m_1 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} \right) = X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt}.$$

Это уравненіе можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\frac{m_1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Переходимъ теперь къ полярнымъ координатамъ. Тогда

$$x = r \cos \theta, \qquad y = r \sin \theta.$$

Кромѣ того, такъ какъ сила F_1 есть сила центральная, то будемъ имѣть:

$$X = \mp F_1 \cos \theta, \qquad Y = \mp F_1 \sin \theta,$$

гдѣ знакъ — соотвѣтствуетъ случаю притягательной, а знакъ + случаю отталкивательной силы.

Беря производныя, имѣемъ:

$$\frac{dx}{dt} = \cos\theta\,\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \sin\theta\,\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Имѣя въ виду эти уравненія, получаемъ:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} = \pm F_1\frac{dr}{dt}.$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (42), получаемъ:

$$\frac{m_1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = \mp F_1\frac{dr}{dt} \quad \ldots\ldots (43)$$

Въ лѣвой части подъ знакомъ производной примемъ за независимую перемѣнную θ и сообразно съ этимъ замѣнимъ производную $\frac{dr}{dt}$ такимъ выраженіемъ:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}.$$

На основаніи уравненія (21) имѣемъ

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c_1}{r^2}.$$

Поэтому можемъ написать

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c_1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}.$$

Послѣ этого уравненіе (43) приметъ видъ:

$$\frac{m_1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{c_1^{\,2}}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{c_1^{\,2}}{r^2}\right] = \mp F_1\frac{dr}{dt}.$$

Или

$$\frac{m_1 c_1^{\,2}}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\{\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right\}^2 + \frac{1}{r^2}\right] = \mp F_1\frac{dr}{dt} \quad \ldots\ldots (44)$$

Но изъ уравненія (38) получаемъ:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\theta - \omega) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

и слѣдовательно

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = -\frac{e}{p}\sin(\theta - \omega).$$

Поэтому уравненіе (44) преобразовывается въ такое:

$$\frac{m_1 c_1^2}{2} \frac{d}{dt}\left[\frac{e^2}{p^2} sin^2(\theta - \omega) + \frac{1}{p^2} + \frac{2e}{p^2} cos(\theta - \omega) + \frac{e^2}{p^2} cos^2(\theta - \omega)\right] = \mp F_1 \frac{dr}{dt}.$$

Или

$$\frac{m_1 c_1^2}{2} \frac{d}{dt}\left[\frac{e^2}{p^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{2e}{p^2} cos\,(\theta - \omega)\right] = \mp F_1 \frac{dr}{dt}.$$

Изъ уравненія (45) находимъ

$$\frac{2e}{p^2} cos\,(\theta - \omega) = \frac{2}{pr} - \frac{2}{p^2}.$$

Подставляя это выраженіе въ предыдущее уравненіе, получаемъ:

$$\frac{m_1 c_1^2}{2} \frac{d}{dt}\left[\frac{e^2}{p^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{pr} - \frac{2}{p^2}\right] = \mp F_1 \frac{dr}{dt}.$$

Беря въ лѣвой части производную по времени отъ выраженія, заключеннаго въ скобки, находимъ

$$-\frac{m_1 c_1^2}{pr^2} \cdot \frac{dr}{dt} = \mp F_1 \frac{dr}{dt}.$$

Очевидно, во второй части уравненія надо взять знакъ — . Это, какъ мы выше видѣли, указываетъ намъ на то, что сила F_1 есть сила притягательная. Для самой силы мы получаемъ такое выраженіе:

$$F_1 = \frac{m_1 c_1^2}{pr^2}.$$

Но c_1 есть удвоенная секторіальная скорость небеснаго тѣла, т. е. $c_1 = 2\nu$. Слѣдовательно

$$F_1 = \frac{4 m_1 \nu^2}{pr^2}.$$

По обобщенному третьему закону Кеплера мы имѣемъ:

$$\frac{\nu^2}{M_{1,2}\,p} = \frac{k^2}{4} \quad \text{или} \quad \nu^2 = \frac{k^2 M_{1,2}\,p}{4} \quad \ldots\ldots (46)$$

Поэтому выраженіе для силы F_1, съ которой тѣло m_1 притягивается къ началу координатъ, принимаетъ слѣдующій видъ:

$$F_1 = \frac{k^2 M_{1,2}\, m_1}{r^2}.$$

Ускореніе, сообщаемое тѣлу m_1 этою силою, выразится формулой

$$\frac{F_1}{m_1} = \frac{k^2 M_{1,2}}{r^2}.$$

Такимъ ускореніемъ тѣло m_1 обладаетъ въ своемъ относительномъ движеніи вокругъ тѣла m_2. Если предположимъ, что абсолютное движеніе тѣлъ m_1 и m_2 происходитъ вслѣдствіе ихъ взаимнаго притяженія съ силою F, то тѣла m_1 и m_2 при абсолютныхъ своихъ движеніяхъ должны пріобрѣсти соотвѣтственно такія ускоренія $\frac{F}{m_1}$ и $\frac{F}{m_2}$. Нетрудно понять, что между этими ускореніями и ускореніемъ $\frac{F_1}{m_1}$ тѣла m_1 въ его относительномъ движеніи вокругъ тѣла m_2 должно существовать такое соотношеніе:

$$\frac{F_1}{m_1} = \frac{F}{m_1} + \frac{F}{m_2},$$

такъ какъ направленія ускореній $\frac{F}{m_1}$ и $\frac{F}{m_2}$ прямопротивоположны. Послѣдняя формула преобразовывается въ такую:

$$\frac{F_1}{m_1} = \frac{F\,(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}.$$

Отсюда имѣемъ:

$$F = \frac{m_2 F_1}{M_{1,\,2}}.$$

Или окончательно:

$$F = \frac{k^2\, m_1\, m_2}{r^2}.$$

Эта формула и представляетъ собою не что иное, какъ законъ Ньютона.

Такимъ образомъ, *если относительное движеніе тѣла m_1 вокругъ тѣла m_2 подчиняется тремъ законамъ Кеплера, то эти два тѣла взаимно притягиваются по закону Ньютона.*

ГЛАВА IV.

Движенie небеснаго тѣла по эллиптической орбитѣ.

§ 16. Опредѣленie положенiя небеснаго тѣла на орбитѣ.

Положимъ, что движенie небеснаго тѣла происходитъ по эллиптической орбитѣ. Въ такомъ случаѣ интегралъ площадей и уравненie орбиты въ полярныхъ координатахъ имѣютъ слѣдующiй видъ:

$$\left.\begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{dt} &= k\sqrt{M_{1,2}\, a\,(1 - e^2)} \\ r &= \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \omega)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (47)$$

Здѣсь уголъ θ есть уголъ между радiусомъ-векторомъ SM небеснаго тѣла и полярною осью SX, уголъ ω есть уголъ между большою осью SP эллиптической орбиты и полярной осью SX (рис. 11). Поэтому, если мы буквой v назовемъ уголъ между радiусомъ-векторомъ SM и большою осью SP, то, очевидно, мы будемъ имѣть такое соотношенie

$$\theta - \omega = v \quad \ldots (48)$$

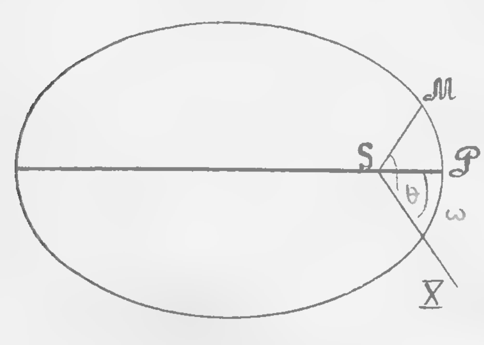


Рис. 11.

Замѣтимъ, что уголъ v называется *истинной аномалiей* небеснаго тѣла. Имѣя въ виду равенство (48), мы уравненiя (47) перепишемъ такъ:

$$\left.\begin{aligned} r^2 \frac{dv}{dt} &= k\sqrt{M_{1,2}\, a\,(1 - e^2)} \\ r &= \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos v}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (49)$$

Пользуясь этими уравненіями, можно выразить радіусъ-векторъ r и истинную аномалію v въ функціи времени t и, слѣдовательно, опредѣлить положеніе небеснаго тѣла на его орбитѣ.

Но для облегченія рѣшенія нашей задачи мы введемъ новую вспомогательную перемѣнную E, имѣющую слѣдующее геометрическое значеніе. На большой оси эллипса, какъ на діаметрѣ, построимъ кругъ (рис. 12). Изъ точки M, представляющей положеніе планеты на эллиптической орбитѣ, опустимъ перпендикуляръ MN на большую ось AP и продолжимъ его до пересѣченія съ окружностью вышеупомянутаго круга въ точкѣ K. Соединимъ точку K съ центромъ эллипса O. Уголъ KOP и примемъ за новую перемѣнную E. Этотъ уголъ E называется *эксцентрической аномаліей*. Выразимъ радіусъ-векторъ r въ зависимости отъ E. Для этого въ уравненіи

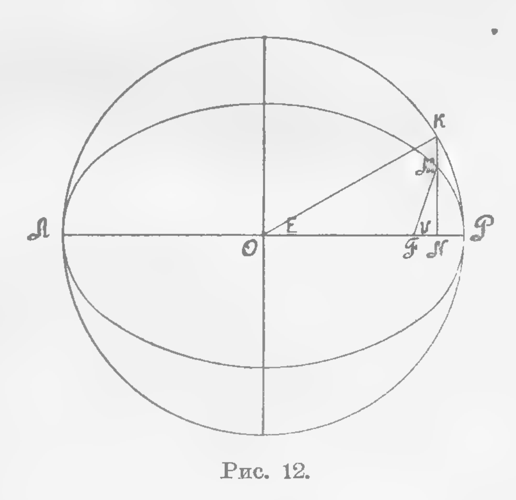


Рис. 12.

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v},$$

которое можетъ быть переписано такъ:

$$r + re \cos v = a - ae^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

замѣнимъ $r \cos v$ на основаніи нижеслѣдующихъ соображеній. Изъ треугольника FNM имѣемъ:

$$FN = r \cos v.$$

Съ другой стороны

$$FN = ON - OF = a \cos E - ae.$$

Поэтому

$$r \cos v = a \cos E - ae,$$

послѣ чего уравненіе (50) даетъ:

$$r + ae \cos E - ae^2 = a - ae^2.$$

Отсюда

$$r = a(1 - e \cos E) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

Легко убѣдиться, что соотношеніе (51) остается справедливымъ, гдѣ бы точка M на своей орбитѣ ни находилась.

По рисунку 12-му нетрудно видѣть, что когда v лежитъ въ первой или во второй четверти, то и E заключается въ предѣлахъ отъ 0° до 180° Точно также, когда v лежитъ въ третьей или четвертой четверти, то и E заключается въ предѣлахъ отъ 180° до 360°, и при этомъ E одновременно съ v обращается въ 0° и въ 180°. Слѣдовательно, $\sin E$ всегда такого же знака, какъ и $\sin v$.

Теперь намъ надо было бы опредѣлить истинную аномалію v въ зависимости отъ эксцентрической E, но мы выведемъ формулы, которыя одновременно дадутъ возможность опредѣлять и радіусъ-векторъ r, и истинную аномалію v.

Мы имѣемъ два выраженія для r, а именно:

$$r = a\,(1 - e\cos E)$$

и

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos v}.$$

Приравнивая ихъ одно другому, получаемъ

$$1 + e\cos v = \frac{1 - e^2}{1 - e\cos E}.$$

Отсюда

$$e\cos v = \frac{e\cos E - e^2}{1 - e\cos E}.$$

Или

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}.$$

На основаніи этого выраженія составимъ $\sin v$. Имѣемъ

$$\sin v = \pm\sqrt{1 - \frac{(\cos E - e)^2}{(1 - e\cos E)^2}}$$

Или

$$\sin v = \pm\frac{\sqrt{1 - 2e\cos E + e^2\cos^2 E - \cos^2 E + 2e\cos E - e^2}}{1 - e\cos E}.$$

Или

$$\sin v = \pm\frac{\sqrt{(1 - e^2) - (1 - e^2)\cos^2 E}}{1 - e\cos E}.$$

Или окончательно

$$\sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2}\,.\,\sin E}{1 - e\cos E}.$$

Въ этомъ окончательномъ выраженіи мы удержали во второй части знакъ $+$, потому что $\sin v$ и $\sin E$, какъ мы видѣли выше, всегда бываютъ одного знака. Умножая лѣвыя части полученныхъ нами выра-

женій для $\cos v$ и $\sin v$ на r, а правыя на равную ему величину $a(1-e\cos E)$, получаемъ такую систему формулъ для опредѣленія r и v въ зависимости отъ E:

$$\left.\begin{array}{l} r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\,.\,\sin E \\ r\cos v = a(\cos E - e). \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Эти формулы опредѣляютъ уголъ v безъ всякой двойственности.

Выведемъ теперь для опредѣленія r и v другія формулы, тоже часто употребляющіяся въ астрономіи.

Пользуясь формулой для $\cos v$, составимъ:

$$1-\cos v \quad \text{и} \quad 1+\cos v.$$

Имѣемъ:

$$1-\cos v = \frac{1-e\cos E-\cos E+e}{1-e\cos E},\quad 1+\cos v = \frac{1-e\cos E+\cos E-e}{1-e\cos E}.$$

Замѣчая, что

$$1-\cos v = 2\sin^2\frac{v}{2} \quad \text{и} \quad 1+\cos v = 2\cos^2\frac{v}{2},$$

имѣемъ:

$$2\sin^2\frac{v}{2} = \frac{(1+e)(1-\cos E)}{1-e\cos E},\quad 2\cos^2\frac{v}{2} = \frac{(1-e)(1+\cos E)}{1-e\cos E}.$$

Замѣчая, что

$$1-\cos E = 2\sin^2\frac{E}{2} \quad \text{и} \quad 1+\cos E = 2\cos^2\frac{E}{2},$$

получаемъ:

$$\sin^2\frac{v}{2} = \frac{(1+e)\sin^2\frac{E}{2}}{1-e\cos E},\quad \cos^2\frac{v}{2} = \frac{(1-e)\cos^2\frac{E}{2}}{1-e\cos E}.$$

По извлеченіи квадратнаго корня находимъ:

$$\sin\frac{v}{2} = \frac{\sqrt{1+e}\,.\,\sin\frac{E}{2}}{\sqrt{1-e\cos E}},\qquad \cos\frac{v}{2} = \frac{\sqrt{1-e}\,.\,\cos\frac{E}{2}}{\sqrt{1-e\cos E}}.$$

Въ обоихъ случаяхъ при извлеченіи корня мы удерживаемъ знакъ $+$, такъ какъ на основаніи вышеприведенныхъ замѣчаній относительно угловъ v и E нетрудно заключить, что углы $\frac{v}{2}$ и $\frac{E}{2}$ всегда лежатъ въ одной четверти (одновременно въ первой или одновременно во второй). Умножая лѣвыя части предыдущихъ уравненій на $\sqrt{r}$, а правыя на равную ему величину

$$\sqrt{a(1-e\cos E)},$$

находимъ окончательно

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{r}\, sin\,\frac{v}{2} &= \sqrt{a\,(1+e)}\, sin\,\frac{E}{2}\\ \sqrt{r}\, cos\,\frac{v}{2} &= \sqrt{a\,(1-e)}\, cos\,\frac{E}{2}\,.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(53)$$

Вмѣсто формулъ (52) или (53) для опредѣленія r и V можно пользоваться также формулами:

$$\left.\begin{aligned}r &= a\,(1-e\,cos\,E)\\ tg\,\frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\,\frac{E}{2}\,.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(54)$$

Первую изъ этихъ формулъ мы уже имѣли раньше, вторая же получается черезъ раздѣленіе первой изъ формулъ (53) на вторую. При опредѣленіи v по формуламъ (54) надо помнить, что $\frac{v}{2}$ лежитъ всегда въ той же четверти, какъ и $\frac{E}{2}$.

Формулы (54) можно написать еще нѣсколько въ другомъ видѣ. Для этого вмѣсто эксцентриситета e введемъ другую замѣняющую его постоянную φ, которая связана съ e уравненіемъ $e = sin\,\varphi$. Уголъ φ называется *угломъ эксцентриситета*. Въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть

$$1+e = 1+sin\,\varphi = sin^2\frac{\varphi}{2}+cos^2\frac{\varphi}{2}+2\,sin\frac{\varphi}{2}\,.\,cos\,\frac{\varphi}{2} = \left(cos\,\frac{\varphi}{2}+sin\,\frac{\varphi}{2}\right)^2,$$

$$1-e = 1-sin\,\varphi = sin^2\frac{\varphi}{2}+cos^2\frac{\varphi}{2}-2\,sin\frac{\varphi}{2}\,.\,cos\,\frac{\varphi}{2} = \left(cos\,\frac{\varphi}{2}-sin\,\frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Слѣдовательно:

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \frac{cos\,\frac{\varphi}{2}+sin\,\frac{\varphi}{2}}{cos\,\frac{\varphi}{2}-sin\,\frac{\varphi}{2}} = \frac{1+tg\,\frac{\varphi}{2}}{1-tg\,\frac{\varphi}{2}} = \frac{tg\,45^\circ+tg\,\frac{\varphi}{2}}{1-tg\,45^\circ tg\,\frac{\varphi}{2}} = tg\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Необходимо замѣтить, что φ всегда меньше 90° и слѣдовательно $\frac{\varphi}{2}$ всегда меньше 45°, а потому всегда

$$cos\,\frac{\varphi}{2} > sin\,\frac{\varphi}{2}\,.$$

Такъ какъ коэффиціентъ $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ во второмъ изъ уравненій (54) есть величина положительная, то только что приведенными соображеніями приходилось руководствоваться при извлеченіи квадратнаго корня изъ дроби $\frac{1+e}{1-e}$, выраженной въ зависимости отъ $\frac{\varphi}{2}$.

Теперь уравненія (54) можно написать въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} r &= a\,(1 - \sin\varphi \cos E), \\ tg\,\frac{v}{2} &= tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) tg\,\frac{E}{2}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Итакъ, когда для какого-нибудь момента времени t намъ дана эксцентрическая аномалія E, то радіусъ-векторъ r и истинная аномалія v могутъ быть вычислены или по формуламъ (52), или по формуламъ (53), или, наконецъ, по формуламъ (54), которыя могутъ быть замѣнены равносильными имъ формулами (55).

§ 17. Уравненіе Кеплера.

Теперь намъ остается найти зависимость между эксцентрической аномаліей E и временемъ t. Для этой цѣли мы воспользуемся первымъ изъ выраженій (49)

$$r^2\,\frac{dv}{dt} = k\sqrt{M_{1,2}\,a\,(1 - e^2)}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

въ которомъ r и v замѣнимъ ихъ выраженіями въ зависимости отъ E. Проинтегрировавъ уравненіе (56), мы и выполнимъ послѣднее интегрированіе, о которомъ говорили въ § 11.

Дифференцируя соотношеніе

$$tg\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\;tg\,\frac{E}{2}\,,$$

получаемъ:

$$dv = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\;\frac{\cos^2\dfrac{v}{2}}{\cos^2\dfrac{E}{2}}\,dE \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Пользуясь вторымъ изъ соотношеній (53), имѣемъ:

$$\frac{\cos^2\dfrac{v}{2}}{\cos^2\dfrac{E}{2}} = \frac{a\,(1-e)}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Слѣдовательно

$$dv = \frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}\,.\,dE \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Подставляя это въ уравненіе (56) и замѣняя r его выраженіемъ

$$r = a\,(1 - e\cos E),$$

получаемъ

$$(1 - e \cos E)\, dE = \frac{k\sqrt{M_{1,2}}}{a^{3/2}}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots (60)$$

Вспомнимъ выраженіе для Гауссовой постоянной, именно

$$k = \frac{2\pi\, a^{3/2}}{P_{1,2}\sqrt{M_{1,2}}}.$$

Мы видимъ, что во второй части входитъ множитель $\frac{2\pi}{P_{1,2}}$. Если 2π выразить въ угловой мѣрѣ, а $P_{1,2}$ въ суткахъ, то этотъ множитель представитъ угловое суточное движеніе нѣкоторой фиктивной точки, обращающейся вокругъ солнца по окружности круга съ постоянной скоростью и совершающей полный оборотъ въ $P_{1,2}$ сутокъ. Такая фиктивная точка называется *среднею планетою* или *кометой*, а величина $\frac{2\pi}{P_{1,2}}$ носитъ названіе *средняго суточнаго движенія* разсматриваемаго небеснаго тѣла и обозначается буквой n, такъ что

$$n = \frac{2\pi}{P_{1,2}}.$$

На основаніи выраженія для Гауссовой постоянной имѣемъ

$$n = \frac{k\sqrt{M_{1,2}}}{a^{3/2}}.$$

Послѣ этого соотношеніе между E и t приметъ видъ:

$$(1 - e \cos E)\, dE = n dt \quad \ldots\ldots\ldots (61)$$

Это уравненіе интегрируется легко. Послѣ интегрированія получаемъ:

$$E - e \sin E = n\,(t - T) \quad \ldots\ldots\ldots (62)$$

Здѣсь T есть постоянная произвольная, введенная интегрированіемъ. Не трудно убѣдиться, что T есть *время прохожденія небеснаго тѣла черезъ перигелій*, такъ какъ при $E = 0$, что имѣетъ мѣсто для перигелія, уравненіе (62) даетъ $t = T$.

Уравненіе (62) извѣстно подъ названіемъ *уравненія Кеплера*. Когда дано E, то по уравненію Кеплера легко найти t. Рѣшеніе обратной задачи гораздо труднѣе и будетъ разсмотрѣно нами ниже. Выраженіе $n\,(t - T)$ есть угловое перемѣщеніе средней планеты въ теченіе $(t - T)$ сутокъ послѣ прохожденія ея черезъ перигелій, причемъ средняя планета, какъ показываетъ уравненіе Кеплера, проходитъ черезъ перигелій одновременно съ истинной. Величина $n\,(t - T)$ обозначается нерѣдко одной буквой M и называется *средней аномаліей* небеснаго тѣла. Въ такомъ

случаѣ уравненіе Кеплера, связывающее эксцентрическую аномалію съ средней, принимаетъ видъ:

$$E - e \sin E = M.$$

Отсюда мы видимъ, что M одновременно съ E, а по предыдущему слѣдовательно также одновременно и съ v обращается въ 0° и въ 180°. Всѣ три аномаліи заключаются одновременно либо между 0° и 180°, либо между 180° и 360°.

При этомъ въ первомъ случаѣ

$$v \geqslant E \geqslant M\,,$$

а во второмъ

$$v \leqslant E \leqslant M.$$

Замѣтимъ, что изъ уравненія Кеплера, положивши въ немъ $E = \pi$ и

$$t - T = \frac{1}{2} P_{1,2},$$

мы легко получаемъ точное выраженіе третьяго закона Кеплера.

§ 18. Опредѣленіе положенія небеснаго тѣла въ пространствѣ.

Для окончательнаго опредѣленія положенія небеснаго тѣла въ пространствѣ мы должны вывести формулы для опредѣленія прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ его центра въ любой моментъ времени t. При этомъ за начало координатъ O мы примемъ центръ солнца, за плоскость XOY плоскость эклиптики, ось OX направимъ въ точку весенняго равноденствія, ось OY въ точку, долгота которой равна 90°, и ось OZ въ сѣверный полюсъ эклиптики (рис. 13). Координаты x, y, z по отношенію къ такимъ координатнымъ осямъ называются *прямолинейными прямоугольными геліоцентрическими эклиптикальными координатами* небеснаго тѣла. Положимъ, что изъ начала координатъ, какъ изъ центра, описана сфера радіусомъ, равнымъ единицѣ. Пусть дуга XNY представляетъ на этой сферѣ эклиптику, пусть дуга $N\Pi M$ есть пересѣченіе плоскости орбиты съ этой сферой. Тогда ON есть линія узловъ плоскости орбиты относительно плоскости эклиптики. Положеніе плоскости орбиты ONM

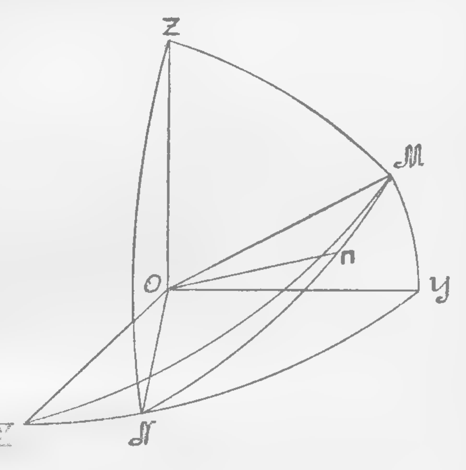


Рис. 13.

по отношенію къ плоскости эклиптики XOY опредѣляется двумя величинами: долготой восходящаго угла $\Omega = \angle XON$ и наклонностью $i = \angle MNY$ плоскости орбиты къ плоскости эклиптики. Пусть П есть перигелій, а M — положеніе небеснаго тѣла на орбитѣ. Если въ плоскости орбиты за полярную ось принять линію узловъ ON, то постоянная ω, равная углу $\angle NO\Pi$, называется *угловымъ разстояніемъ перигелія отъ узла.* Далѣе уголъ $\angle \Pi OM$ есть истинная аномалія v небеснаго тѣла M.

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что координаты x, y, z точки M могутъ быть представлены въ такомъ видѣ:

$$x = r \cos \angle MOX, \quad y = r \cos \angle MOY, \quad z = r \cos \angle MOZ,$$

гдѣ r есть радіусъ-векторъ точки M.

Значитъ, если мы опредѣлимъ входящіе въ эти формулы косинусы, то мы будемъ знать и координаты x, y, z. Для опредѣленія $\cos \angle MOX$ обращаемся къ сферическому треугольнику MXN, въ которомъ

$$XN = \Omega, \; NM = \omega + v, \; \angle XNM = 180^\circ - i.$$

Изъ этого треугольника имѣемъ:

$$\cos \angle MOX = \cos (v + \omega) \cos \Omega - \sin (v + \omega) \sin \Omega \cos i.$$

Изъ сферическаго треугольника MNY, въ которомъ

$$NY = 90^\circ - \Omega, \; NM = \omega + v, \; \angle MNY = i,$$

опредѣляемъ $\cos \angle MOY$, а именно:

$$\cos \angle MOY = \cos (v + \omega) \sin \Omega + \sin (v + \omega) \cos \Omega \cos i.$$

Наконецъ, для опредѣленія $\cos \angle MOZ$ обращаемся къ треугольнику MZN, въ которомъ

$$ZN = 90^\circ, \quad NM = \omega + v, \quad \angle ZNM = 90^\circ - i.$$

Изъ этого треугольника получаемъ:

$$\cos \angle MOZ = \sin (v + \omega) \sin i.$$

Такимъ образомъ координаты x, y, z опредѣлятся при помощи слѣдующихъ формулъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,[\cos (v + \omega) \cos \Omega - \sin (v + \omega) \sin \Omega \cos i] \\ y &= r\,[\cos (v + \omega) \sin \Omega + \sin (v + \omega) \cos \Omega \cos i] \\ z &= r \sin (v + \omega) \sin i. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \; (63)$$

Входящіе въ эти формулы r и v можно опредѣлить по формуламъ

$$r = a(1 - e \cos E), \quad tg\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg\frac{E}{2},$$

причемъ E находимъ изъ уравненія Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - T).$$

Правая часть этого уравненія можетъ быть представлена нѣсколько иначе, а именно·

$$n(t - T) = n(t - t_0) + n(t_0 - T), \quad \ldots\ldots (64)$$

гдѣ t_0 есть совершенно произвольный моментъ.

Въ такомъ случаѣ

$$n(t_0 - T)$$

есть не что иное, какъ средняя аномалія M_0, соотвѣтствующая этому моменту t_0, и мы имѣемъ:

$$n(t - T) = n(t - t_0) + M_0 \quad \ldots\ldots (65)$$

Моментъ t_0 называется *эпохой*, а M_0 называется *средней аномаліей эпохи* t_0. Постоянная M_0 вполнѣ замѣняетъ собою постоянную T. Вводя постоянную M_0, мы уравненіе Кеплера перепишемъ такъ:

$$E - e \sin E = M_0 + n(t - t_0).$$

Сопоставимъ теперь вмѣстѣ всѣ тѣ постоянныя, которыя опредѣляютъ движеніе небеснаго тѣла по эллиптической орбитѣ. Такихъ постоянныхъ шесть, и онѣ называются *элементами эллиптической орбиты.* Эти элементы суть:

i — наклонность плоскости орбиты къ плоскости эклиптики, заключающаяся, какъ мы видѣли въ § 10, въ предѣлахъ отъ $0°$ до $180°$;

☊ — долгота восходящаго узла плоскости орбиты по отношенію къ плоскости эклиптики, считаемая въ направленіи съ запада черезъ югъ на востокъ отъ $0°$ до $360°$;

ω — угловое разстояніе перигелія отъ узла, считаемое также въ направленіи съ запада черезъ югъ на востокъ отъ $0°$ до $360°$;

a — большая полуось эллиптической орбиты;

e — эксцентриситетъ орбиты;

T — время прохожденія небеснаго тѣла черезъ перигелій.

Элементы i и Ω опредѣляютъ положеніе плоскости орбиты въ пространствѣ. Элементъ ω опредѣляетъ положеніе самой орбиты въ ея плоскости; этотъ элементъ можетъ быть замѣненъ *долготой перигелія*

$$\pi = \Omega + \omega.$$

Элементъ a опредѣляетъ размѣръ эллиптической орбиты; онъ можетъ быть замѣненъ среднимъ суточнымъ движеніемъ

$$n = \frac{k\sqrt{M_{1,2}}}{a^{3/2}},$$

причемъ въ этой формулѣ Гауссова постоянная должна быть выражена въ секундахъ дуги на основаніи соотношенія

$$k'' = \frac{k}{\sin 1''}.$$

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$n = \frac{[3.5500066]\sqrt{M_{1,2}}}{a^{3/2}},$$

гдѣ число, заключенное въ скобки, есть логариѳмъ.

Элементъ e опредѣляетъ форму эллиптической орбиты, бо̀льшую или меньшую ея вытянутость; этотъ элементъ можетъ быть замѣненъ угломъ эксцентриситета φ.

Наконецъ, элементъ T опредѣляетъ положеніе небеснаго тѣла на его орбитѣ; этотъ элементъ можетъ быть замѣненъ средней аномаліей M_0 эпохи t_0.

Такимъ образомъ *движеніе небеснаго тѣла по эллиптической орбитѣ опредѣляется шестью элементами.*

§ 19. Задача Кеплера и ея рѣшеніе.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что, если мы сумѣемъ опредѣлить эксцентрическую аномалію E для любого момента t, то опредѣленіе положенія небеснаго тѣла въ пространствѣ уже не представитъ никакого затрудненія. Опредѣлить эксцентрическую аномалію E для нѣкотораго момента t это значитъ рѣшить уравненіе Кеплера. Опредѣленіе эксцентрической аномаліи E по данной средней называется *задачей Кеплера.* Рѣшеніе задачи Кеплера сводится къ рѣшенію трансцендентнаго уравненія (62). Рѣшить это уравненіе можно лишь послѣдовательными приближеніями. Прежде чѣмъ излагать различные способы рѣшенія уравненія Кеплера, мы покажемъ, что оно всегда имѣетъ одинъ и только одинъ дѣйствительный корень для всякаго значенія M.

Уравненіе Кеплера мы можемъ переписать въ видѣ

$$F(E) = E - e \sin E - M = 0.$$

Данное значеніе M, очевидно, всегда должно удовлетворять условію

$$(n+1)\pi > M > n\pi,$$

гдѣ π есть отношеніе окружности къ діаметру, а n — какое-нибудь цѣлое число. Въ такомъ случаѣ можно доказать, что *для всякаго даннаго значенія средней аномаліи, заключающагося между предѣлами* $n\pi$ *и* $(n+1)\pi$, *существуетъ одно и только одно дѣйствительное значеніе эксцентрической аномаліи* E, *удовлетворяющее уравненію Кеплера и заключающееся тоже между предѣлами* $n\pi$ *и* $(n+1)\pi$. Въ самомъ дѣлѣ при

$$E = n\pi$$

мы имѣемъ:

$$F(n\pi) = n\pi - M < 0.$$

Наоборотъ при

$$E = (n+1)\pi$$

получаемъ:

$$F[(n+1)\pi] = (n+1)\pi - M > 0.$$

Отсюда заключаемъ, что можетъ существовать нечетное число значеній E, удовлетворяющихъ уравненію Кеплера и заключающихся между предѣлами $n\pi$ и $(n+1)\pi$. Но такъ какъ для эллипса

$$0 < e < 1,$$

то производная функціи $F(E)$, имѣющая видъ:

$$F'(E) = 1 - e \cos E,$$

остается положительной при всѣхъ значеніяхъ эксцентрической аномаліи E, т. е. функція $F(E)$ все время возрастаетъ съ возрастаніемъ E. Поэтому при измѣненіи E отъ $n\pi$ до $(n+1)\pi$ она можетъ обратиться въ нуль только одинъ разъ. Такимъ образомъ высказанная выше теорема доказана.

Послѣ этого мы можемъ приступить къ изложенію различныхъ способовъ рѣшенія задачи Кеплера, причемъ необходимо замѣтить, что первые два изъ разсмотрѣнныхъ ниже способовъ съ успѣхомъ могутъ быть примѣнены лишь тогда, когда эксцентриситетъ e есть величина малая, что для огромнаго большинства небесныхъ тѣлъ нашей солнечной системы имѣетъ мѣсто. Значительнымъ эксцентриситетомъ обладаютъ лишь нѣкоторыя кометы и весьма немногія изъ малыхъ планетъ.

1) *Способъ послѣдовательныхъ приближеній.* Уравненіе Кеплера имѣетъ видъ:

$$E - e \sin E = M.$$

Это уравненіе мы можемъ переписать въ такомъ видѣ:

$$E = M + e \sin E.$$

Во второй части уравненія входитъ неизвѣстная величина E. Въ виду малости множителя e въ членѣ $e \sin E$ эксцентрическую аномалію E можно замѣнить средней M.

Тогда будемъ имѣть

$$E_1 = M + e \sin M.$$

При помощи этой формулы получается первое приближеніе E_1 для эксцентрической аномаліи E. Замѣтимъ, что здѣсь эксцентриситетъ непремѣнно долженъ быть выраженъ *въ угловой мѣрѣ*, для чего e необходимо раздѣлить или на $\sin 1^\circ$, или на $\sin 1'$, или на $\sin 1''$, въ зависимости отъ того, выражаемъ ли мы углы въ градусахъ, минутахъ или секундахъ.

Подставимъ теперь въ уравненіе Кеплера вмѣсто E только что найденное первое приближеніе E_1. Тогда во второй части этого уравненія мы получимъ не M, а нѣкоторую отличную отъ него величину M_1, такъ что

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1.$$

Теперь будемъ искать такую поправку ΔE_1, прибавленіе которой къ E_1 дало бы величину

$$E_2 = E_1 + \Delta E_1,$$

точно удовлетворяющую уравненію Кеплера. Для этого дифференцируемъ уравненіе Кеплера. Имѣемъ:

$$dM = (1 - e \cos E)\, dE,$$

откуда

$$dE = \frac{dM}{1 - e \cos E}.$$

Въ этой формулѣ подъ e надо подразумѣвать *отвлеченное число.* Переходя отъ дифференціаловъ къ поправкамъ, имѣемъ:

$$\Delta E = \frac{\Delta M}{1 - e \cos E}.$$

Очевидно, что при опредѣленіи поправки ΔE изъ только что написанной формулы мы должны въ ней вмѣсто ΔM взять $M - M_1$.

Поэтому

$$\Delta E_1 = \frac{M - M_1}{1 - e \cos E_1}.$$

Послѣ этого второе приближенiе найдемъ по формулѣ:

$$E_2 = E_1 + \Delta E_1.$$

Обыкновенно вслѣдствiе того, что вмѣсто дифференцiаловъ мы беремъ конечныя и иногда довольно большiя поправки, и это второе приближенiе E_2, при его подстановкѣ въ уравненiе Кеплера, вмѣсто средней аномалiи M дастъ нѣкоторую отличную отъ нея величину M_2. Подобно предыдущему, мы будемъ опредѣлять эксцентрическую аномалiю и во всѣхъ послѣдующихъ приближенiяхъ до тѣхъ поръ, пока наконецъ нѣкоторое значенiе E_n, при его подстановкѣ въ уравненiе Кеплера, не дастъ въ правой части уравненiя величины

$$M_n = M.$$

Способъ этотъ довольно мѣшкотный, но онъ значительно упрощается, когда рѣшенiе уравненiя Кеплера должно быть выполнено для цѣлаго ряда равноотстоящихъ моментовъ t', t'', t''', ... $t^{n)}$. Тогда большое число приближенiй приходится дѣлать только для первыхъ двухъ или, въ крайности, трехъ моментовъ. Имѣя же эксцентрическiя аномалiи E', E'', E''' для моментовъ t', t'', t''', мы можемъ составить первыя разности $E''-E'$, $E'''-E''$ и вторую разность $(E'''-E'')-(E''-E')$. По этимъ разностямъ, экстраполируя, мы можемъ уже настолько точно предугадать значенiе эксцентрической аномалiи для момента t^{IV}, что для этого момента рѣшенiе уравненiя Кеплера потребуетъ не болѣе одного приближенiя. Опредѣливши E^{IV}, подобно предыдущему, безъ всякаго труда найдемъ E^{V} и затѣмъ, пользуясь тѣмъ же прiемомъ, послѣдовательно весьма легко будемъ опредѣлять значенiя эксцентрической аномалiи для всѣхъ послѣдующихъ моментовъ.

2) *Способъ Гюльдена.* Этотъ способъ основанъ на томъ, что синусъ малой дуги отличается отъ самой дуги на малыя величины третьяго порядка. Этотъ способъ даетъ точную величину эксцентрической аномалiи E въ томъ случаѣ, когда третьей степенью эксцентриситета можно пренебречь.

Полагая, что x есть какая нибудь малая дуга, мы можемъ написать:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \ldots$$

Пренебрегая членомъ $\frac{x^3}{6}$, имѣемъ:

$$\sin x = x.$$

Обратимся теперь къ уравненiю Кеплера

$$E - e \sin E = M.$$

Считая e малой величиной перваго порядка, положимъ

$$\sin x = e \sin E.$$

Отсюда

$$x = \arcsin (e \sin E).$$

Пренебрегая величинами третьяго порядка, можемъ написать:

$$e \sin E = \arcsin (e \sin E).$$

Послѣ этого уравненіе Кеплера принимаетъ видъ:

$$E - \arcsin (e \sin E) = M.$$

Составимъ теперь $\sin M$ и $\cos M$. Имѣемъ:

$$\sin M = \sin E \sqrt{1 - e^2 \sin^2 E} - e \cos E \sin E$$

$$\cos M = \cos E \sqrt{1 - e^2 \sin^2 E} + e \sin^2 E$$

или

$$\sin M = \sin E [\sqrt{1 - e^2 \sin^2 E} - e \cos E]$$

$$\cos M = \cos E [\sqrt{1 - e^2 \sin^2 E} - e \cos E] + e.$$

Окончательно получаемъ:

$$\sin M = \sin E [\sqrt{1 - e^2 \sin^2 E} - e \cos E]$$

$$\cos M - e = \cos E [\sqrt{1 - e^2 \sin^2 E} - e \cos E].$$

Дѣля первую формулу на вторую, получаемъ:

$$tg\, E = \frac{\sin M}{\cos M - e}.$$

Въ этой формулѣ подъ e надо разумѣть *отвлеченное число.* Такъ какъ множитель

$$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 E} - e \cos E$$

есть величина положительная, близкая къ единицѣ, то, очевидно, четверть, въ которой лежитъ уголъ E, опредѣлится изъ того условія, что $\sin E$ и $\cos E$ должны быть соотвѣтственно того же знака, какъ $\sin M$ и $\cos M - e$.

По этому способу эксцентрическая аномалія опредѣляется съ точностью до членовъ 2-го порядка включительно относительно e. Если членами третьяго порядка относительно эксцентриситета e пренебречь нельзя, то можно искать поправку къ найденному значенію E по первому способу.

3) *Графическій способъ.* Въ тѣхъ случаяхъ, когда эллиптическая

орбита обладаетъ значительнымъ эксцентриситетомъ, приближенное значеніе эксцентрической аномаліи, удовлетворяющее уравненію Кеплера, можно опредѣлить, пользуясь графическимъ способомъ рѣшенія этого уравненія .

Уравненіе Кеплера имѣетъ видъ:

$$E - e \sin E - M = 0$$

или

$$\sin E = \frac{1}{e}(E - M).$$

Возьмемъ систему прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ и построимъ кривую и прямую, представляемыя слѣдующими уравненіями:

$$y = \sin E$$

$$y = \frac{1}{e}(E - M).$$

Кривая, представляемая первымъ уравненіемъ, есть синусоида. При построеніи этой синусоиды по оси абсциссъ откладываемъ равноотстоящія значенія E, полагая, напр., по 10 миллиметровъ на каждые 20° (рис. 14). За единицу длины для y можемъ принять, напр., 50 миллиметровъ. Сообразно съ этимъ на оси ординатъ въ разстояніи 50 миллиметровъ отъ начала координатъ поставлена отмѣтка 1,0.

Затѣмъ для значеній эксцентрической аномаліи, равныхъ 0°, 20°, 40°, 60° . . ., вычисляемъ значенія y, которыя и откладываемъ на соотвѣтственныхъ перпендикулярахъ къ оси абсциссъ; черезъ полученныя такимъ образомъ точки проводимъ плавную кривую DCE, которая и есть синусоида. Такъ какъ при $E = 0$ имѣемъ $y = 0$, то синусоида проходитъ черезъ начало координатъ.

Второе уравненіе представляетъ прямую линію, составляющую съ осью OE уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{1}{e}$. При $y = 0$ имѣемъ $E = M$. Такимъ образомъ получаемъ точку A пересѣченія прямой линіи съ осью OE. Чтобы получить вторую точку нашей прямой, положимъ въ ея уравненіи, напр., $y = 2$. Эксцентрическая аномалія, соотвѣтствующая этому значенію y, найдется изъ уравненія:

$$E = M + 2e,$$

причемъ e должно быть выражено въ угловой мѣрѣ. Координаты

$$E = M + 2e \quad \text{и} \quad y = 2$$

опредѣлятъ положеніе второй точки B нашей прямой. Соединяя точки A и B прямой линіей, мы получимъ точку C пересѣченія прямой

$$y = \frac{1}{e}(E - M)$$

съ синусоидой

$$y = \sin E.$$

Координаты точки C должны удовлетворять какъ уравненію прямой, такъ и уравненію синусоиды. А такъ какъ уравненіе Кеплера

$$\sin E = \frac{1}{e}(E - M)$$

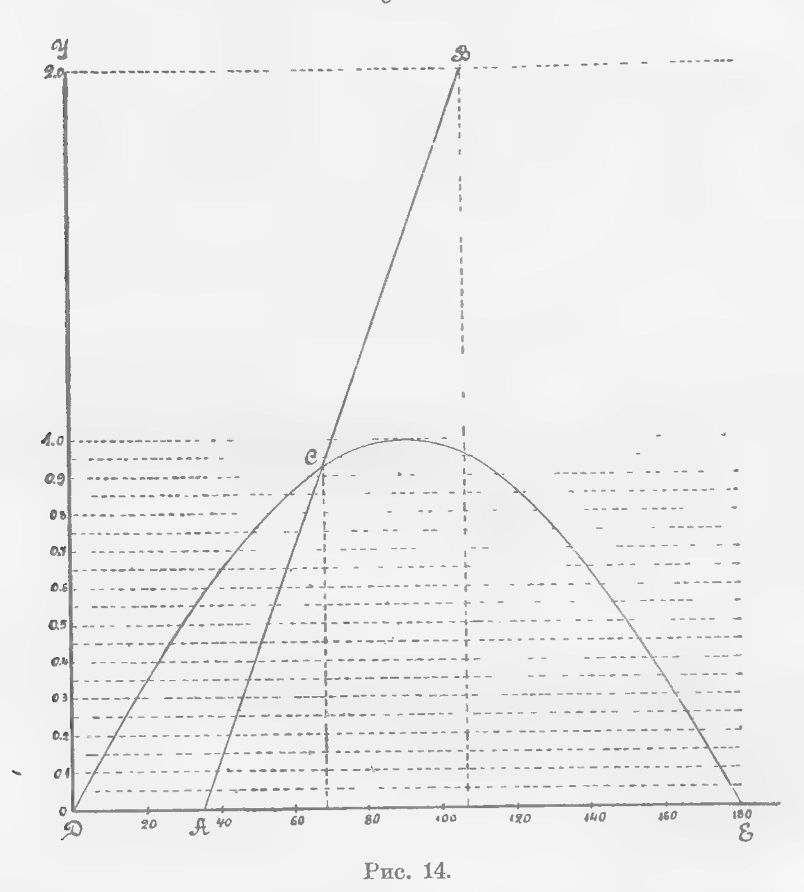


Рис. 14.

выражаетъ, что ордината точки, лежащей на синусоидѣ, равна ординатѣ точки, лежащей на прямой, то ему, очевидно, должна удовлетворять абсцисса точки C пересѣченія прямой AB съ синусоидой DCE. Слѣдовательно эта абсцисса и представитъ искомое приближенное значеніе E_1 эксцентрической аномаліи.

Для опредѣленія болѣе точнаго значенія эксцентрической аномаліи поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Вычисляемъ среднюю аномалію M_1, соотвѣтствующую эксцентрической E_1. Затѣмъ увеличимъ или уменьшимъ E_1, напр., на $10'$ и съ новымъ значеніемъ

$$E_2 = E_1 \pm 10'$$

вычисляемъ опять среднюю аномалію M_2. Если данное значеніе M лежитъ между M_1 и M_2 или, хотя и лежитъ за M_2, но мало отъ него отличается, то болѣе точное значеніе E находимъ по простой пропорціи.

Послѣ этого для нахожденія точнаго значенія эксцентрической аномаліи мы можемъ воспользоваться способомъ послѣдовательныхъ приближеній.

Замѣтимъ, что для рѣшенія уравненія Кеплера было предложено очень много различныхъ способовъ. Литература по этому вопросу до 1900 года собрана въ Bulletin astronomique, Bd. XVII, p.p. 37—47. Позднѣйшую литературу можно найти въ ежегодно выходящемъ Astronomischer Jahresbericht.

§ 20. Рядъ Лагранжа.

Задачу Кеплера можно еще рѣшать при помощи разложенія эксцентрической аномаліи E въ рядъ, расположенный по степенямъ эксцентриситета e. Для этой цѣли служитъ рядъ Лагранжа, который мы и выведемъ.

Положимъ, что z есть функція отъ x, опредѣляемая уравненіемъ

$$z = x + \alpha f(z), \qquad (66)$$

гдѣ α есть параметръ, а функція f явнымъ образомъ ни отъ x, ни отъ α не зависитъ.

Положимъ далѣе, что намъ дана функція $F(z)$ и требуется разложить ее въ рядъ, расположенный по степенямъ параметра α. Такъ какъ z зависитъ отъ α, то и $F(z)$ мы можемъ разсматривать какъ неявную функцію отъ α.

Поэтому по формулѣ Маклорена можемъ написать

$$F(z)=[F(z)]_0+\alpha\left[\frac{\partial F(z)}{\partial\alpha}\right]_0+\frac{\alpha^2}{1.2}\left[\frac{\partial^2 F(z)}{\partial\alpha^2}\right]_0+\frac{\alpha^3}{1.2.3}\left[\frac{\partial^3 F(z)}{\partial\alpha^3}\right]_0+\ldots, \qquad (67)$$

причемъ

$$[F(z)]_0, \left[\frac{\partial F(z)}{\partial\alpha}\right]_0, \left[\frac{\partial^2 F(z)}{\partial\alpha^2}\right]_0, \ldots$$

суть значенія функціи $F(z)$ и ея производныхъ по α при $\alpha = 0$.

Наша задача сводится къ опредѣленію коэффиціентовъ въ предыдущемъ рядѣ.

Черезъ дифференцированіе уравненія

$$z = x + \alpha f(z)$$

сначала по α, а потомъ по x, получаемъ:

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha} = \alpha f'(z)\frac{\partial z}{\partial\alpha} + f(z) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \alpha f'(z)\frac{\partial z}{\partial x}$$

Изъ этихъ уравненій находимъ:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{f(z)}{1-\alpha f'(z)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1-\alpha f'(z)} \quad \ldots \ldots (68)$$

Сравнивая между собою выраженія производныхъ $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, имѣемъ:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = f(z) \frac{\partial z}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (69)$$

Дифференцируя это уравненіе по x и затѣмъ умножая его на произвольную функцію отъ z, для которой примемъ обозначеніе $\varphi(z)$, находимъ:

$$\varphi(z) \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)}{\partial x} = \varphi(z) \frac{\partial \left[f(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x}.$$

Такъ какъ результатъ не зависитъ отъ порядка дифференцированія, то предыдущее уравненіе можемъ переписать въ видѣ:

$$\varphi(z) \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial \alpha} = \varphi(z) \frac{\partial \left[f(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots (70$$

Умножимъ теперь лѣвую часть уравненія (69) на $\frac{d\varphi(z)}{dz} \frac{\partial z}{\partial x}$, а правую на равную величину $\frac{\partial \varphi(z)}{\partial x}$. Тогда будемъ имѣть:

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial \alpha} = f(z) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial x} \left[f(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right] \quad \ldots \ldots \ldots (71)$$

Сложимъ теперь почленно уравненія (70) и (71). Въ такомъ случаѣ найдемъ:

$$\varphi(z) \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi(z)}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(z) \frac{\partial \left[f(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(z)}{\partial x} \left[f(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right].$$

Это уравненіе можетъ быть переписано въ видѣ:

$$\frac{\partial \left[\varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial \alpha} = \frac{\partial \left[\varphi(z) f(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x} \quad \ldots \ldots (72)$$

Это уравненіе намъ показываетъ, что, если надо взять производную по α отъ выраженія вида $\varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}$, то достаточно это выраженіе умножить на $f(z)$ и отъ произведенія взять производную по x.

Продифференцируемъ уравненіе (72) по α. Тогда получимъ:

$$\frac{\partial^2 \left[\varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \left[\varphi(z) f(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x \, \partial \alpha}$$

или

$$\frac{\partial^2 \left[\varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial \left\{ \frac{\partial \left[\varphi(z) f(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial \alpha} \right\}}{\partial x}.$$

На основаніи уравненія (72) вторую часть этого уравненія мы можемъ преобразовать, а именно дифференцированіе по α можемъ замѣнить дифференцированіемъ по x, введя предварительно множителя $f(z)$. Тогда будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^2 \left[\varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \left\{[f(z)]^2 \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right\}}{\partial x^2}.$$

Производя послѣдовательныя дифференцированія этого уравненія по α и дѣлая постоянно замѣну, подобную только что указанной, мы въ концѣ концовъ получимъ:

$$\frac{\partial^{n-1} \left[\varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial \alpha^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1} \left\{[f(z)]^{n-1} \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right\}}{\partial x^{n-1}} \quad \ldots\ldots (73)$$

Пользуясь произвольностью функціи φ, положимъ.

$$\varphi(z) = f(z) F'(z).$$

Умножая это уравненіе на $\frac{\partial z}{\partial x}$ и обращая вниманіе на уравненіе (69), получаемъ:

$$\varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f(z) F'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = F'(z) \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial F(z)}{\partial \alpha}.$$

Дифференцируя это уравненіе $n - 1$ разъ по α, имѣемъ:

$$\frac{\partial^n F(z)}{\partial \alpha^n} = \frac{\partial^{n-1} \left[\varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial \alpha^{n-1}}.$$

Имѣя въ виду уравненіе (73) и замѣняя $\varphi(z)$ его величиной $f(z) F'(z)$, получаемъ:

$$\frac{\partial^n F(z)}{\partial \alpha^n} = \frac{\partial^{n-1} \left\{[f(z)]^n F'(z) \frac{\partial z}{\partial x}\right\}}{\partial x^{n-1}} \quad \ldots\ldots (74)$$

На основаніи уравненія (66) при $\alpha=0$ имѣемъ: $z_0=x$, $F[(z)]_0=F(x)$.
Далѣе уравненія (68) даютъ

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)_0 = f(x), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 1.$$

Поэтому

$$\left[\frac{\partial F(z)}{\partial \alpha}\right]_0 = F'[(z)]_0 \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)_0 = f(x)\, F'(x)$$

и наконецъ формула (74) даетъ:

$$\left[\frac{\partial^n F(z)}{\partial \alpha^n}\right]_0 = \frac{d^{n-1}\{[f(x)]^n F'(x)\}}{dx^{n-1}}\,.$$

Послѣ этого формула (67) обращается въ такую:

$$F(z) = F(x) + \alpha f(x) F'(x) + \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \frac{d\{[f(x)]^2 F'(x)\}}{dx} +$$

$$+ \ldots + \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{d^{n-1}\{[f(x)]^n F'(x)\}}{dx^{n-1}} + \ldots \quad \ldots . (75)$$

Это и есть *рядъ Лагранжа.*

Въ частномъ случаѣ, когда $F(z)$ равно z, рядъ Лагранжа имѣетъ видъ:

$$z = x + \alpha f(x) + \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \frac{d[f(x)]^2}{dx} + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{d^{n-1}[f(x)]^n}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots . (76)$$

Рядомъ Лагранжа пользуются, какъ мы уже выше сказали, для разложенія эксцентрической аномаліи E по степенямъ эксцентриситета e. Рядъ Лагранжа служитъ также для представленія радіуса-вектора r и истинной аномаліи v въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по степенямъ эксцентриситета e.

§ 21. Разложеніе эксцентрической аномаліи, радіуса-вектора и истинной аномаліи въ ряды, расположенные по степенямъ эксцентриситета.

Мы знаемъ, что эксцентрическая аномалія связана съ средней урав неніемъ Кеплера

$$E = M + e \sin E.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (66), мы видимъ, что это послѣднее обращается въ уравненіе Кеплера, если положить:

$$z = E, \qquad x = M, \qquad \alpha = e, \qquad f(z) = \sin E.$$

Слѣдовательно, чтобы разложить эксцентрическую аномалію E въ рядъ, расположенный по степенямъ e, мы должны воспользоваться формулой (76), причемъ, очевидно, мы должны положить

$$f(x) = \sin M.$$

Коэффиціентъ при e^k въ нашемъ рядѣ будетъ имѣть видъ:

$$\frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,k} \cdot \frac{d^{k-1}\,[\sin^k M]}{dM^{k-1}}.$$

Изъ курса введенія въ анализъ извѣстно, что при n нечетномъ имѣетъ мѣсто такой рядъ:

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n M = \sin n M - n \sin (n-2) M + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \sin (n-4) M -$$

$$- \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\,.\,2\,\ldots\,\frac{n-1}{2}} \sin M, \quad \ldots\ldots\ldots (77)$$

а при n четномъ такой:

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n M = \cos nM - n \cos (n-2) M + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \cos (n-4) M -$$

$$- \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+2\right)}{1\,.\,2\,\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)} \cos M + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\,.\,2\,\ldots\,\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2} \ldots (78)$$

Изъ дифференціальнаго исчисленія извѣстно, что

$$\frac{d^{k-1}\,[\sin nM]}{dM^{k-1}} = n^{k-1} \sin \left[nM + (k-1)\frac{\pi}{2} \right] \quad \ldots\ldots (79)$$

Поэтому имѣемъ:

$$\frac{d \sin^2 M}{dM} = \frac{1}{2}\; 2 \sin 2M$$

$$\frac{d^2 \sin^3 M}{dM^2} = \frac{1}{2^2}\left[3^2 \sin 3M - 3 \sin M\right]$$

$$\frac{d^3 \sin^4 M}{dM^3} = \frac{1}{2^3}[4^3 \sin 4M - 4 \,.\, 2^3 \sin 2M]$$

$$\frac{d^4 \sin^5 M}{dM^4} = \frac{1}{2^4}\left[5^4 \sin 5M - 5 \,.\, 3^4 \sin 3M + \frac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2} \sin M\right]$$

$$\frac{d^5 \sin^6 M}{dM^5} = \frac{1}{2^5}\left[6^5 \sin 6M - 6 \,.\, 4^5 \sin 4M + \frac{6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2} \,.\, 2^5 \,.\, \sin 2M\right] \text{и т. д}$$

Такимъ образомъ разложеніе E по степенямъ эксцентриситета e будетъ имѣть такой видъ:

$$E = M + e \sin M + \frac{e^2}{1 \,.\, 2} \sin 2M + \frac{e^3}{1.2.3.2^2}[3^2 \sin 3M - 3 \sin M] +$$

$$+ \frac{e^4}{1.2.3.4.2^3}[4^3 \sin 4M - 4 \,.\, 2^3 \sin 2M] +$$

$$+ \frac{e^5}{1.2.3.4.5.2^4} \cdot \left[5^4 \sin 5M - 5 \,.\, 3^4 \sin 3M + \frac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2} \sin M\right] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \frac{e^k}{1.2.3\ldots k.2^{k-1}} \cdot \Big[k^{k-1} \sin kM - k(k-2)^{k-1} \sin (k-2) M +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{1 \,.\, 2} (k-4)^{k-1} \sin (k-4) M + \ldots\Big] + \ldots \quad . \; . \,(80)$$

Представимъ теперь радіусъ-векторъ r въ видѣ ряда, расположеннаго по степенямъ e. Мы знаемъ, что радіусъ-векторъ связанъ съ эксцентрической аномаліей уравненіемъ:

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E.$$

Если бы намъ удалось разложить $\cos E$ въ рядъ, расположенный по степенямъ e, то задача наша была бы рѣшена. А чтобы представить $\cos E$ въ видѣ такого ряда, намъ надо воспользоваться рядомъ Лагранжа (75) и положить

$$F(z) = \cos E,$$

причемъ, какъ прежде, должно быть

$$z = E,\; x = M,\; \alpha = e,\; f(z) = \sin E.$$

Слѣдовательно, мы будемъ имѣть:

$$f(x) = \sin M,\; F(x) = \cos M,\; F'(x) = -\sin M,$$

$$f(x)\, F'(x) = -\sin^2 M = \frac{1}{2}(\cos 2M - 1),\; [f(x)]^k F'(x) = -\sin^{k+1} M.$$

Коэффиціентъ при e^k въ разложеніи $\cos E$ будетъ:

$$-\frac{1}{1\,.\,2\ldots k}\,\frac{d^{k-1}\{[f(x)]^k F'(x)\}}{dx^{k-1}}=-\frac{1}{1\,.\,2\ldots k}\,\frac{d^{k-1}(\sin^{k+1}M)}{dM^{k-1}}.$$

Имѣя въ виду формулы (77), (78) и (79), составляемъ:

$$\frac{d\sin^3 M}{dM}=-\frac{1}{2^2}(3\cos 3M-3\cos M)$$

$$\frac{d^2\sin^4 M}{dM^2}=-\frac{1}{2^3}(4^2\cos 4M-4\,.\,2^2\cos 2M)$$

$$\frac{d^3\sin^5 M}{dM^3}=-\frac{1}{2^4}\left(5^3\cos 5M-5\,.\,3^3\cos 3M+\frac{5\,.\,4}{1\,.\,2}\cos M\right)$$

$$\frac{d^4\sin^6 M}{dM^4}=-\frac{1}{2^5}\left(6^4\cos 6M-6\,.\,4^4\cos 4M+\frac{6\,.\,5}{1\,.\,2}\,.\,2^4\cos 2M\right)$$

и т. д.

Такимъ образомъ получаемъ:

$$\cos E=\cos M+\frac{e}{2}(\cos 2M-1)+\frac{e^2}{1\,.\,2\,.\,2^2}(3\cos 3M-3\cos M)+$$
$$+\frac{e^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2^3}\cdot(4^2\cos 4M-4\,.\,2^2\cos 2M)+\ldots$$

Послѣ этого безъ труда напишемъ такое разложеніе $\frac{r}{a}$ въ рядъ, расположенный по степенямъ e:

$$\frac{r}{a}=1-e\cos M-\frac{e^2}{2}(\cos 2M-1)-\frac{e^3}{1\,.\,2\,.\,2^2}(3\cos 3M-3\cos M)-$$
$$-\frac{e^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2^3}(4^2\cos 4M-4\,.\,2^2\cos 2M)-$$
$$-\frac{e^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,2^4}\left(5^3\cos 5M-5\,.\,3^3\cos 3M+\frac{5\,.\,4}{1\,.\,2}\cos M\right)-$$
$$-\frac{e^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,2^5}\left(6^4\cos 6M-6\,.\,4^4\cos 4M+\frac{6\,.\,5}{1\,.\,2}\,.\,2^4\cos 2M\right)-$$
$$-\ldots-\frac{e^k}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(k-1)\,.\,2^{k-1}}\Big[k^{k-2}\cos kM-k(k-2)^{k-2}\cos(k-2)M+$$
$$+\frac{k(k-1)}{1\,.\,2}(k-4)^{k-2}\cos(k-4)M+\ldots\Big]-\ldots\quad(81)$$

Разложеніе истинной аномаліи v въ рядъ по степенямъ эксцентриситета e, если пользоваться рядомъ Лагранжа, требуетъ болѣе сложныхъ выкладокъ. Поэтому мы получимъ это разложеніе на основаніи другихъ

соображенiй и доведемъ его лишь до членовъ второго порядка относительно эксцентриситета.

Обратимся къ интегралу площадей, который напишемъ въ видѣ

$$dv = \frac{k}{r^2} \sqrt{M_{1,2}\, a\, (1 - e^2)}\, dt.$$

Вводя среднее суточное движенiе

$$n = \frac{k\sqrt{M_{1,2}}}{a^{3/2}},$$

получаемъ:

$$dv = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2}\, n\, dt.$$

Но такъ какъ

$$n\, dt = dM,$$

то имѣемъ:

$$dv = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2}\, dM.$$

Если мы выраженiе

$$\frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2}$$

представимъ въ видѣ ряда, расположеннаго по степенямъ эксцентриситета e, то затѣмъ черезъ интегрированiе получимъ также и v въ видѣ такого же ряда.

Съ точностью до величинъ второго порядка относительно e имѣемъ:

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos M - \frac{e^2}{2}(\cos 2M - 1).$$

Отсюда по биному Ньютона получаемъ:

$$\frac{a^2}{r^2} = \left[1 - e\cos M - \frac{e^2}{2}(\cos 2M - 1)\right]^{-2} =$$

$$= 1 + 2e\cos M + e^2(\cos 2M - 1) + 3e^2\cos^2 M.$$

Замѣняя $\cos^2 M$ равнымъ ему выраженiемъ

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2M),$$

находимъ:

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 + 2e\cos M + \frac{e^2}{2}(5\cos 2M + 1).$$

Пользуясь еще разъ разложенiемъ по биному Ньютона, имѣемъ:

$$\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2} = \frac{a^2}{r^2}(1-e^2)^{\frac{1}{2}} = \left[1 + 2e\cos M +\right.$$

$$\left. + \frac{e^2}{2}(5\cos 2M + 1)\right]\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right).$$

Удерживая, какъ и раньше, лишь члены второго порядка относительно e, получаемъ:

$$\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2} = 1 + 2e\cos M + \frac{5e^2}{2}\cos 2M.$$

Умножая это выраженіе на dM и интегрируя, находимъ разложеніе для v, а именно:

$$v = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \ldots \quad \ldots\ldots (82)$$

Необходимо замѣтить, что изъ всѣхъ рядовъ, выведенныхъ въ этомъ параграфѣ, наиболѣе важный есть рядъ (80), такъ какъ онъ заключаетъ въ себѣ рѣшеніе уравненія Кеплера. Найдя же E по данному M, мы можемъ радіусъ-векторъ r и истинную аномалію v вычислить по точнымъ формуламъ, которыя были даны выше.

Замѣтимъ, что выведенные въ этомъ параграфѣ ряды имѣютъ важное значеніе въ теоретическихъ изслѣдованіяхъ. Этими рядами приходится пользоваться въ курсѣ небесной механики.

§ 22. О сходимости рядовъ, представляющихъ эксцентрическую и истинную аномаліи и радіусъ-векторъ.

Обратимся къ ряду (80) и постараемся опредѣлить, для какихъ значеній эксцентриситета онъ будетъ сходящимся. Общій членъ этого ряда имѣетъ видъ:

$$\frac{e^k}{1.2.3\ldots k.2^{k-1}}\Big[k^{k-1}\sin kM - k(k-2)^{k-1}\sin(k-2)M + \\ + \frac{k(k-1)}{1.2}(k-4)^{k-1}\sin(k-4)M + \ldots\Big].$$

Вмѣсто ряда (80) будемъ разсматривать рядъ съ общимъ членомъ такого вида:

$$A_k = \frac{e^k}{1.2.3\ldots k.2^{k-1}}\Big[k^{k-1} + k(k-2)^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1.2}(k-4)^{k-1} + \ldots\Big].$$

Такимъ образомъ каждый членъ того ряда, который мы вводимъ въ разсмотрѣніе, непремѣнно будетъ больше соотвѣтственнаго члена ряда (80). Поэтому, для тѣхъ значеній эксцентриситета e, для которыхъ новый рядъ будетъ сходящимся, непремѣнно долженъ быть сходящимся и рядъ (80).

Для сходимости введеннаго нами въ разсмотрѣніе ряда съ положительными членами достаточно, чтобы было

$$\lim\left(\frac{A_{k+1}}{A_k}\right)_{k=\infty} < 1.$$

Имѣя выраженіе общаго члена A_k, легко составляемъ:

$$\frac{A_{k+1}}{A_k}=\frac{e}{2\,(k+1)}\,\frac{\left[(k+1)^k+(k+1)\,(k+1-2)^k+\frac{(k+1)\,k}{1\,.\,2}\cdot(k+1-4)^k+\ldots\right]}{\left[k^{k-1}+k\,(k-2)^{k-1}+\frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}\,(k-4)^{k-1}+\ldots\right]}.$$

Это можемъ представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{A_{k+1}}{A_k}=\frac{e}{2\,(k+1)}\cdot\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}\,\frac{\left[1+(k+1)\left(1-\frac{2}{k+1}\right)^k+\frac{(k+1)\,k}{1\,.\,2}\left(1-\frac{4}{k+1}\right)^k+\ldots\right]}{\left[1+k\left(1-\frac{2}{k}\right)^{k-1}+\frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}\left(1-\frac{4}{k}\right)^{k-1}+\ldots\right]}.$$

Изъ курса дифференціальнаго исчисленія извѣстно, что

$$lim\left(1-\frac{n}{k+1}\right)^k_{k=\infty}=\mathfrak{э}^{-n}\quad\text{и}\quad lim\left(1-\frac{n}{k}\right)^{k-1}_{k=\infty}=\mathfrak{э}^{-n},$$

гдѣ $\mathfrak{э}$ есть основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ. Поэтому

$$lim\left(\frac{A_{k+1}}{A_k}\right)_{k=\infty}=\frac{e}{2}\,lim\left\{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k-1}\frac{\left[1+(k+1)\,\mathfrak{э}^{-2}+\frac{(k+1)\,k}{1\,.\,2}\,\mathfrak{э}^{-4}+\ldots\right]}{\left[1+k\mathfrak{э}^{-2}+\frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}\,\mathfrak{э}^{-4}+\ldots\right]}\right\}_{k=\infty}.$$

Замѣчая, что

$$lim\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k-1}_{k=\infty}=\mathfrak{э},$$

и представляя разложенія, входящія въ числитель и знаменатель, въ видѣ степеней, получаемъ:

$$lim\left(\frac{A_{k+1}}{A_k}\right)_{k=\infty}=\frac{e}{2}\,.\,\mathfrak{э}\;lim\left\{\frac{(1+\mathfrak{э}^{-2})^{k+1}}{(1+\mathfrak{э}^{-2})^k}\right\}_{k=\infty}.$$

Окончательно имѣемъ:

$$lim\left(\frac{A_{k+1}}{A_k}\right)_{k=\infty}=\frac{e}{2}\,.\,\mathfrak{э}\,\left(1+\mathfrak{э}^{-2}\right)=\frac{e\,(1+\mathfrak{э}^2)}{2\mathfrak{э}}.$$

Опредѣлимъ теперь e_1 изъ уравненія:

$$e_1=\frac{2\mathfrak{э}}{1+\mathfrak{э}^2}.$$

Въ такомъ случаѣ какъ новый рядъ, такъ и рядъ (80) будутъ сходящимися при всѣхъ значеніяхъ эксцентриситета e, удовлетворяющихъ условію

$$e<e_1.$$

Полагая
$$э = 2{,}7,$$
находимъ, что
$$e_1 = 0{,}65.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ убѣждаемся, что и рядъ (81) будетъ сходящимся для всѣхъ значеній эксцентриситета e, удовлетворяющихъ условію
$$e < 0{,}65.$$

Лапласъ первый нашелъ точный предѣлъ эксцентриситета e, при которомъ ряды (80), (81) и (82) перестаютъ быть сходящимися. Этотъ предѣлъ равенъ 0,6627...

§ 23. Уравненіе центра.

Уравненіемъ центра какого-нибудь небеснаго тѣла называется разность между истинной и средней аномаліями этого тѣла.

Называя уравненіе центра буквой x, мы на основаніи уравненія (82) можемъ написать

$$x = v - M = 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots \quad \dots \quad (83)$$

Если къ истинной аномаліи прибавить долготу перигелія π, то получится *долгота небеснаго тѣла въ орбитѣ*, которую обозначимъ буквой L, такъ что
$$L = v + \pi.$$

Если къ средней аномаліи M прибавить долготу перигелія π, то получится *средняя долгота* небеснаго тѣла, которую обозначимъ буквой L_0, такъ что
$$L_0 = M + \pi.$$

Отсюда вполнѣ понятно, что *уравненіемъ центра какого-нибудь небеснаго тѣла можетъ быть названа также разность между долготой этого тѣла въ орбитѣ и средней его долготой*, такъ что
$$x = L - L_0.$$

Такъ какъ средняя планета или комета, какъ мы знаемъ, проходитъ черезъ перигелій и афелій одновременно съ истинной, то при $M = 0$ и при $M = 180°$ уравненіе центра обращается въ нуль. При измѣненіи же M отъ 0° до 180° уравненіе центра все время остается положительнымъ, такъ какъ при этомъ условіи, какъ мы видѣли въ § 17, должно быть
$$v \geqq E \geqq M.$$

Изъ этихъ разсужденій слѣдуетъ, что при нѣкоторомъ значеніи M, лежащемъ въ предѣлахъ отъ 0° до 180°, уравненіе центра должно достигать наибольшей величины.

Далѣе, при движеніи небеснаго тѣла отъ афелія къ перигелію, т. е. при измѣненіи M отъ 180° до 360°, имѣютъ мѣсто неравенства

$$v \leqslant E \leqslant M,$$

и слѣдовательно уравненіе центра остается все время отрицательнымъ. Значитъ, при нѣкоторомъ значеніи M, лежащемъ въ предѣлахъ отъ 180° до 360°, уравненіе центра достигаетъ наименьшей величины. Такъ какъ каждому положенію небеснаго тѣла на той части эллиптической орбиты, которая характеризуется значеніями средней аномаліи, заключающимися между предѣлами отъ 0° до 180°, соотвѣтствуетъ вполнѣ симметричное его положеніе на другой части, опредѣляемой значеніями средней аномаліи, лежащими въ предѣлахъ отъ 180° до 360°, то безъ труда заключаемъ, что

$$x_{min} = -x_{max}.$$

Кромѣ того, очевидно, что, если наибольшей величины уравненіе центра достигаетъ при значеніи M средней аномаліи, то наименьшей величины оно будетъ достигать при значеніи $360° - M$.

Займемся розыcканіемъ наибольшаго и наименьшаго значеній уравненія центра. На основаніи только что сказаннаго мы можемъ ограничиться наибольшимъ его значеніемъ.

Если эксцентриситетъ e такъ малъ, что мы можемъ пренебречь уже его второю степенью, то уравненіе (83) показываетъ, что наибольшаго значенія уравненіе центра достигаетъ при $M = 90°$, и это наибольшее значеніе равно $2e$, причемъ здѣсь e слѣдуетъ выразить, конечно, въ угловой мѣрѣ.

Положимъ далѣе, что пренебречь можно только третьей степенью эксцентриситета e, и будемъ искать, при какомъ значеніи M въ этомъ случаѣ уравненіе центра достигаетъ наибольшей величины.

Пользуясь уравненіемъ (83), беремъ производную отъ x по M:

$$\frac{dx}{dM} = 2e\cos M + \frac{5}{2}e^2\cos 2M.$$

Значеніе M. при которомъ x есть maximum, опредѣлится изъ уравненія:

$$2\cos M + \frac{5}{2}e\cos 2M = 0$$

или

$$2\cos M + \frac{5}{2}e(2\cos^2 M - 1) = 0.$$

Окончательно имѣемъ:

$$\cos^2 M + \frac{2}{5e} \cos M - \frac{1}{2} = 0.$$

Рѣшая это уравненіе, получаемъ:

$$\cos M = -\frac{1}{5e} \pm \frac{1}{5e} \sqrt{1 + \frac{25}{2} e^2}.$$

Пренебрегая третьими степенями e, находимъ:

$$\cos M = -\frac{1}{5e} \pm \frac{1}{5e} \left(1 + \frac{25}{4} e^2\right).$$

Здѣсь изъ двухъ знаковъ, очевидно, надо удержать верхній, такъ какъ при нижнемъ для $\cos M$ получится значеніе по абсолютной величинѣ большее единицы. Поэтому

$$\cos M = \frac{5}{4} e,$$

причемъ здѣсь подъ e слѣдуетъ разумѣть отвлеченное число. Зная $\cos M$, можемъ опредѣлить $\sin M$. Затѣмъ, замѣняя въ уравненіи (83) во второй части $\sin 2M$ равной ему величиной $2 \sin M \cos M$ и всюду пренебрегая третьими степенями эксцентриситета e, для наибольшаго значенія уравненія центра опять получимъ $2e$. Тождественность этого результата съ полученнымъ выше, когда мы пренебрегали вторыми степенями величины e, объясняется тѣмъ, что вообще наибольшее значеніе уравненія центра можетъ быть представлено въ видѣ ряда, содержащаго только нечетныя степени эксцентриситета e.

Въ курсѣ сферической астрономіи было указано, что уравненіе времени вычисляется по правиламъ теоретической астрономіи. Если разсматривать видимое годовое движеніе солнца вокругъ земли, то уравненіе времени y равно разности $\alpha - \alpha_m$, гдѣ α есть прямое восхожденіе центра истиннаго солнца, а α_m — прямое восхожденіе второго средняго солнца. Но такъ какъ прямое восхожденіе α_m второго средняго солнца равно долготѣ перваго средняго солнца или, что то-же самое, средней долготѣ центра истиннаго солнца, то имѣемъ:

$$y = \alpha - L_0,$$

гдѣ

$$L_0 = M + \pi = n(t - T) + \pi.$$

Прямое же восхожденіе α по формуламъ сферической астрономіи можетъ быть получено изъ долготы солнца L, которая выражается такъ:

$$L = L_0 + x = n(t - T) + \pi + x.$$

§ 24. Приведеніе къ эклиптикѣ.

Вообразимъ, что изъ центра солнца описана сфера радіусомъ, равнымъ единицѣ, и пусть на этой сферѣ NMA (рис. 15) есть сферическій треугольникъ, у котораго сторона NA представляетъ эклиптику, сторона NM — орбиту нѣкотораго небеснаго тѣла, напр., планеты, и MA — кругъ широты, проходящій черезъ положеніе планеты M. Въ такомъ случаѣ, если γ есть точка весенняго равноденствія, то въ разсматриваемомъ треугольникѣ будетъ:

$$NA = l - \Omega,\ NM = v + \omega = v + \pi - \Omega = L - \Omega,$$

$$MA = b, \qquad \angle MNA = i,$$

гдѣ l и b суть геліоцентрическія долгота и широта планеты, L — долгота планеты въ орбитѣ, Ω — долгота восходящаго узла и i — наклонность орбиты.

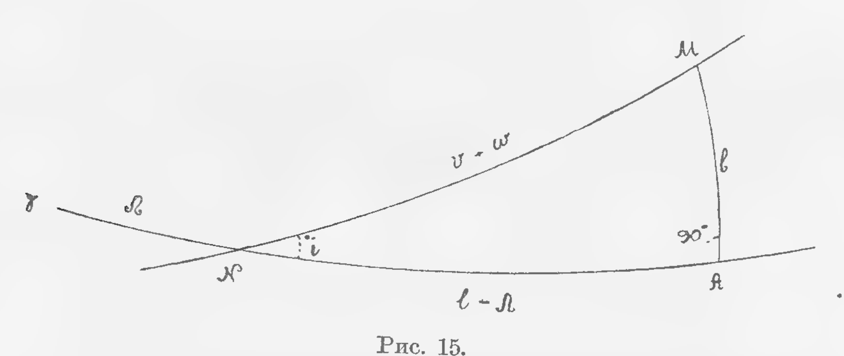


Рис. 15.

Примѣняя къ треугольнику NMA, прямоугольному при A, три основныя формулы сферической тригонометріи, получаемъ

$$\cos (L - \Omega) = \cos (l - \Omega) \cos b$$

$$\sin (L - \Omega) \cos i = \sin (l - \Omega) \cos b$$

$$\sin (L - \Omega) \sin i = \sin b.$$

Изъ этихъ формулъ для опредѣленія l и b легко получаемъ такія:

$$\sin b = \sin (L - \Omega) \sin i,$$

$$tg\,(l - \Omega) = tg\,(L - \Omega) \cos i.$$

Однако, если наклонность i есть величина малая, какъ это имѣетъ мѣсто въ случаѣ планетъ, и, слѣдовательно, $\cos i$ мало отличается отъ

единицы, то лучше воспользоваться для опредѣленія l разложеніемъ въ рядъ. Изъ курса сферической астрономіи *) извѣстно, что если

$$tg\,\alpha = m\,tg\,\beta,$$

гдѣ m есть величина близкая къ единицѣ, то α выражается такимъ рядомъ:

$$\alpha = \beta + \frac{m-1}{m+1} \sin 2\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 \sin 4\beta + \frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3 \sin 6\beta + \ldots$$

Въ нашемъ случаѣ

$$\alpha = l - \Omega,\ \beta = L - \Omega,\ m = \cos i,\ \ \frac{m-1}{m+1} = -\,tg^2\,\frac{i}{2}.$$

Поэтому для опредѣленія l мы имѣемъ такое разложеніе:

$$l = L - tg^2\,\frac{i}{2} \sin 2\,(L - \Omega) + \frac{1}{2}\,tg^4\,\frac{i}{2} \sin 4\,(L - \Omega) \ldots$$

Разность $l - L$ между геліоцентрической долготой планеты и ея долготой въ орбитѣ называется приведеніемъ къ эклиптикѣ. Называя эту разность буквой ξ, имѣемъ:

$$\xi = -\,tg^2\,\frac{i}{2} \sin 2\,(L - \Omega) + \frac{1}{2}\,tg^4\,\frac{i}{2} \sin 4\,(L - \Omega) \ldots \quad (84)$$

Въ заключеніе замѣтимъ, что вторыя части уравненій (80), (82), (83) и (84) должны быть выражены въ угловой мѣрѣ.

УПРАЖНЕНІЯ.

Задача № 7. Найти радіусъ-векторъ r и истинную аномалію v малой планеты Флорентины (321), соотвѣтствующіе эксцентрической аномаліи

$$E = 60°34',5.$$

Для этой планеты уголъ эксцентриситета

$$\varphi = 2°39',05$$

и логариѳмъ большой полуоси

$$\log a = 0,46032.$$

*) А. Ивановъ. Курсъ сферической астрономіи. СПБ. 1911, стр. 95—96.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи можно воспользоваться или формулами (52), или формулами (53), или формулами (55).

Обратимся прежде всего къ формуламъ (52), которыя можемъ написать въ видѣ:

$$r \sin v = a \cos \varphi \sin E$$

$$r \cos v = a (\cos E - \sin \varphi).$$

Мы имѣемъ:

$$\log \sin \varphi = 8{,}66510, \quad \log \cos \varphi = 9{,}99954, \quad \log a \cos \varphi = 0{,}45986.$$

Далѣе по логариѳмамъ Гаусса находимъ

$$\log (\cos E - \sin \varphi),$$

а именно:

$\cos E$	9,69133
	—0,04294
$\sin \varphi$	8,66510
	1,02623
$\cos E - \sin \varphi$	9,64839

Дальнѣйшія вычисленія располагаемъ такъ:

$\sin E$	9,94002		
$r \sin v$	0,39988	$tg\, v$	0,29117
доп. $\sin v$	0,05047	v	62°54′,68
$r \cos v$	0,10871	r	0,45035.

Рѣшимъ ту же задачу по формуламъ (53). Для этого прежде всего составимъ

$$\log (1 + e) \quad \text{и} \quad \log (1 - e).$$

Помня, что

$$e = \sin \varphi,$$

и пользуясь логариѳмами Гаусса, имѣемъ:

$$\log (1 + e) = 0{,}01963, \quad \log (1 - e) = 9{,}97944.$$

Слѣдовательно

$$\log \sqrt{a (1 + e)} = 0{,}23998, \quad \log \sqrt{a (1 - e)} = 0{,}21988.$$

Дальнѣйшія вычисленія располагаемъ такъ:

$\frac{E}{2}$	$30°17',25$		
$\sin\frac{E}{2}$	9,70272	$\sqrt{r}\,\sin\frac{v}{2}$	9,94270
$\cos\frac{E}{2}$	9,93626	доп. $\cos\frac{v}{2}$	0,06902
		$\sqrt{r}\,\cos\frac{v}{2}$	0,15614
$tg\,\frac{v}{2}$	9,78656	$\sqrt{r}$	0,22517
		r	0,45034
$\frac{v}{2}$	$31°27',32$		
v	$62°54',64$		

Вычисленіе по формуламъ (55) располагается такъ:

$\cos E$	9,69133	$\frac{E}{2}$	$30°17',25$
$\sin\varphi\cos E$	8,35643	$tg\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)$	0,02010
$1 - \sin\varphi\cos E$	9,99002	$tg\,\frac{E}{2}$	9,76646
r	0,45034	$tg\,\frac{v}{2}$	9,78656
$\frac{\varphi}{2}$	$1°19',52$	$\frac{v}{2}$	$31°27',32$
$45° + \frac{\varphi}{2}$	$46°19',52$	v	$62°54',64$.

Значенія $\log r$ и v, полученныя по всѣмъ тремъ системамъ формулъ, достаточно хорошо согласуются между собою.

Задача № 8. Вычислить эксцентрическую аномалію планеты Людовики (292) для момента, слѣдующаго за моментомъ прохожденія ея черезъ перигелій и отдѣленнаго отъ этого момента промежуткомъ въ 22,5 дня. Для этой планеты уголъ эксцентриситета

$$\varphi = 1°41',3$$

и среднее суточное движеніе

$$n = 14',678.$$

Рѣшеніе. Прежде всего вычисляемъ среднюю аномалію

$$M = n\,(t - T) = 14',678 \times 22,5 = 5°30',25.$$

Послѣ этого намъ предстоитъ рѣшить уравненіе Кеплера. Примѣнимъ къ рѣшенію этого уравненія способъ послѣдовательныхъ приближеній. Для этого служатъ формулы:

$$E_1 = M + \frac{\sin\varphi}{\sin 1'}\sin M, \qquad E_2 = E_1 + \Delta E_1,$$

$$M_1 = E_1 - \frac{\sin\varphi}{\sin 1'}\sin E_1, \qquad M_2 = E_2 - \frac{\sin\varphi}{\sin 1'}\sin E_2,$$

$$\Delta E_1 = \frac{M - M_1}{1 - \sin\varphi\cos E_1}, \qquad \Delta E_2 = \frac{M - M_2}{1 - \sin\varphi\cos E_2}$$

и т. д., пока не получимъ $M_n = M$. Соотвѣтствующее этому значеніе E_n эксцентрической аномаліи и есть ея точное значеніе.

Мы имѣемъ:

$$\log\sin\varphi = 8,46927$$

и

$$\log\frac{\sin\varphi}{\sin 1'} = 2,00554.$$

Дальнѣйшія вычисленія располагаемъ такъ:

M	$5°30',25$	$\log(M - M_1)$	9,44716
$\sin M$	8,98190	$\cos E_1$	9,99787
$\frac{\sin\varphi}{\sin 1'}\sin M$	0,98744	$\sin\varphi\cos E_1$	8,46714
		$1 - \sin\varphi\cos E_1$	9,98708
число	$9',72$	$\log\Delta E_1$	9,46008
E_1	$5°39',97$	ΔE_1	$+ 0',29$
$\sin E_1$	8,99444	E_2	$5°40',26$
$\frac{\sin\varphi}{\sin 1'}\sin E_1$	0,99998	$\sin E_2$	8,99483
число	$10',00$	$\frac{\sin\varphi}{\sin 1'}\sin E_2$	1,00037
M_1	$5°29',97$	число	$10',01$
$M - M_1$	$0',28$	M_2	$5°30',25.$

Такимъ образомъ получаемъ

$$E = 5^\circ 40',26.$$

Рѣшимъ нашу задачу еще по способу Гюльдена. Для этого служитъ формула:

$$tg\, E = \frac{sin\, M}{cos\, M - sin\, \varphi},$$

M	$5^\circ 30',25$	$sin\, M$	8,98190
$cos\, M$	9,99800	$cos\, M - sin\, \varphi$	9,98495
	—0,01305	$tg\, E$	8,99695
$sin\, \varphi$	8,46927	E	$5^\circ 40',26.$
	1,52873		

Такимъ образомъ мы видимъ, что въ нашемъ случаѣ способъ Гюльдена сразу даетъ точный результатъ. Это объясняется малостью эксцентриситета.

Задача № 9. Рѣшить графическимъ способомъ уравненіе Кеплера при

$$e = 0,7 \quad \text{и} \quad M = 214^\circ 0',0.$$

Рѣшеніе. На прилагаемомъ при семъ рисункѣ построена часть синусоиды, изображаемой уравненіемъ:

$$y = sin\, E,$$

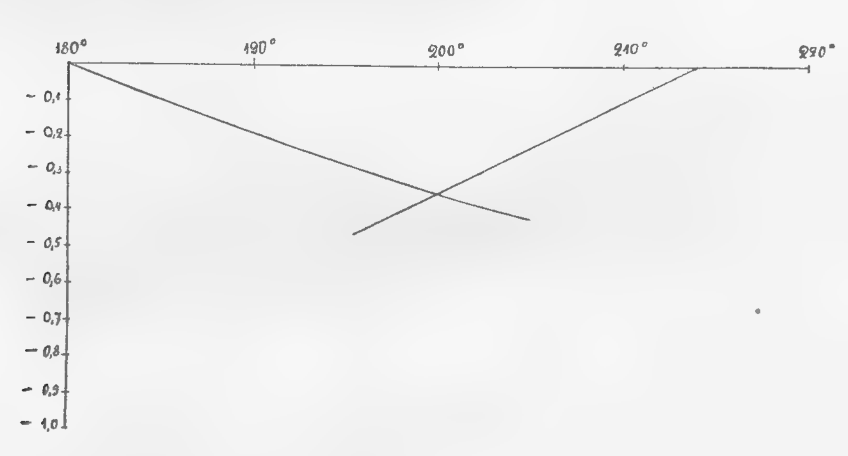


Рис. 16.

и прямая линія, уравненіе которой есть:

$$y = \frac{sin\, 1^\circ}{0,7}\, (E - 214^\circ,0),$$

причемъ въ правой части уравненія введенъ множитель *sin* 1° для того, чтобы обѣ части уравненія сдѣлать однородными.

Для синусоиды были нанесены пять точекъ, а именно:

$$E = 180°, \quad y = 0{,}000$$
$$E = 190\ , \quad y = -0{,}174$$
$$E = 200\ , \quad y = -0{,}342$$
$$E = 210\ , \quad y = -0{,}500$$
$$E = 220\ , \quad y = -0{,}643.$$

Прямая же была построена по двумъ точкамъ, а именно:

$$y = 0{,}000, \quad E = 214°{,}0$$
$$y = -0.500, \quad E = 194\ {,}0.$$

Абсцисса точки пересѣченія синусоиды съ прямой есть

$$E = 200°{,}0 = 200°0'{,}0.$$

Въ нашей задачѣ имѣемъ:

$$\log e = 9{,}84510, \quad \log \frac{e}{\sin 1'} = 3{,}38137.$$

Далѣе съ полученнымъ значеніемъ E вычисляемъ среднюю аномалію:

$$E_1 \quad 200°0'{,}0 \qquad \frac{e}{\sin 1'} \sin E_1 \quad 2{,}91542_n$$
$$\sin E_1 \quad 9{,}53405_n \qquad \text{число} \quad -13°43'{,}0$$
$$M_1 = 213°43'{,}0.$$

Увеличимъ теперь E_1, напр., на $10'$ и со значеніемъ

$$E_2 = 200°10'{,}0$$

опять вычислимъ среднюю аномалію:

$$E_2 \quad 200°10'{,}0 \qquad \frac{e}{\sin 1'} \sin E_2 \quad 2{,}91888_n$$
$$\sin E_2 \quad 9{,}53751_n \qquad \text{число} \quad -13°49'{,}6$$
$$M_2 = 213°59'{,}6.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что измѣненію M на $16'{,}6$ соотвѣт-

ствуетъ измѣненіе E на $10'$. Слѣдовательно, чтобы M измѣнилось еще на $0',4$, надо измѣнить E на

$$\frac{10' \times 0,4}{16,6} = 0',2.$$

Возьмемъ же

$$E_3 = 200°10',2$$

и вычислимъ снова среднюю аномалію

$$E_3 \quad 200°10',2 \qquad \frac{e}{\sin 1'} \sin E_3 \qquad 2,91895_n$$

$$\sin E_3 \quad 9,53758_n \qquad \text{число} \qquad -13°49',8$$

$$M_3 = 214°0',0.$$

Отсюда мы видимъ, что

$$E = 200°10',2$$

точно удовлетворяетъ уравненію Кеплера.

Задача № 10. Пользуясь разложеніями въ ряды, вычислить для малой планеты Флорентины (321) эксцентрическую аномалію, радіусъ-векторъ и истинную аномалію, соотвѣтствующіе средней аномаліи, равной $58°16',0$. Для этой планеты уголъ эксцентриситета

$$\varphi = 2°39',05$$

и логариѳмъ большой полуоси есть

$$\log a = 0,46032.$$

При рѣшеніи задачи ограничимся вторыми степенями эксцентриситета.

Рѣшеніе. Для рѣшенія нашей задачи мы должны воспользоваться рядами:

$$E = M + \frac{e}{\sin 1'} \sin M + \frac{e^2}{2 \sin 1'} \sin 2M$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M - \frac{e^2}{2} (\cos 2M - 1)$$

$$v = M + 2 \frac{e}{\sin 1'} \sin M + \frac{5}{4} \frac{e^2}{\sin 1'} \sin 2M.$$

Прежде всего составляемъ логариѳмы постоянныхъ величинъ:

$$\log e = 8,66510 \qquad \log \frac{e^2}{2} = 7,02917$$

$$\log \frac{e}{\sin 1'} = 2,20137 \qquad \log \frac{e^2}{2 \sin 1'} = 0,56544$$

$$\log \frac{2e}{\sin 1'} = 2,50240 \qquad \log \frac{5\, e^2}{4 \sin 1'} = 0,96338.$$

Далѣе вычисленія располагаемъ по слѣдующей схемѣ:

M	$58°16',0$	$2M$	$116°32',0$
$\sin M$	$9,92968$	$\sin 2M$	$9,95167$
		$\cos 2M$	$9,65003_n$
$\cos M$	$9,72096$	$\cos 2M - 1$	$0,16038_n$.
$\frac{e}{\sin 1'} \sin M$	$2,13105$	$\frac{e^2}{2 \sin 1'} \sin 2M$	$0,51711$
$\frac{2e}{\sin 1'} \sin M$	$2,43208$	$\frac{5e^2}{4 \sin 1'} \sin 2M$	$0,91505$
$- e \cos M$	$8,38606_n$	$- \frac{e^2}{2} (\cos 2M - 1)$	$7,18955$

$\frac{e}{\sin 1'} \sin M$	$+135',22$	$\frac{2e}{\sin 1'} \sin M$	$+270',44$
$\frac{e^2}{\sin 1'} \sin 2M$	$+3,29$	$\frac{5}{4} \frac{e^2}{\sin 1'} \sin 2M$	$+8,22$
Сумма	$+2°18',51$	Сумма	$+4°38',66$
E	$60°34',51$	v	$62°54',66$

$1 \quad e \cos M$	$9,98931$	$\frac{r}{a}$	$9,99000$
	$0,00069$		
$- \frac{e^2}{2} (\cos 2M - 1)$	$7,18955$	r	$0,45032$.
	$2,79976$		

Предлагается сравнить результаты этой задачи съ результатами задачи № 7.

Задача № 11. Вычислить уравненіе центра для малой планеты Гедды (207) при средней аномаліи

$$M = 125°36',6.$$

Для Гедды уголъ эксцентриситета

$$\varphi = 1°40',7.$$

Найти, при какомъ значеніи средней аномаліи уравненіе центра для этой планеты будетъ наибольшее.

Рѣшеніе. Уравненіе центра x вычисляется по формулѣ

$$x = \frac{2e}{\sin 1'} \sin M + \frac{5}{4} \frac{e^2}{\sin 1'} \sin 2M.$$

Сначала вычисляемъ постоянные коэффиціенты:

$\frac{2e}{\sin 1'}$	2,30399	$\frac{5}{4}\frac{e^2}{\sin 1'}$	0,56656.

Далѣе имѣемъ:

M	125°36′,6	$2M$	251°13′,2
$\sin M$	9,91009	$\sin 2M$	$9,97624_n$
$\frac{2e}{\sin 1'}\sin M$	2,21408	$\frac{5}{4}\frac{e^2}{\sin 1'}\sin 2M$	$0,54280_n$
	+163′,71		—3′,49

$$x = 2°40',22.$$

Средняя аномалія, при которой уравненіе центра имѣетъ наибольшее значеніе, вычисляется по формулѣ:

$$\cos M = \frac{5}{4}e.$$

Имѣемъ:

$$\cos M \;\; 8,56360$$

$$M \;\; 87°54',11.$$

Задача № 12. Вычислить приведеніе къ эклиптикѣ для Юпитера по слѣдующимъ даннымъ: долгота въ орбитѣ $L = 28°58',5$, долгота восходящаго узла ☊ $= 99°20',5$, наклонность орбиты $i = 1°18',55$.

Рѣшеніе. Въ данномъ случаѣ достаточно ограничиться однимъ членомъ, именно:

$$\xi = -\frac{tg^2\frac{i}{2}}{\sin 1''}\sin 2(L - ☊).$$

Вычисленія располагаемъ такъ:

L — ☊	— 70°22′,0	$-\sin 2(L$ — ☊$)$	9,80136
$2(L$ — ☊$)$	— 140°44′,0	ξ	1,23163
			$\xi = +17'',0$
$\frac{tg^2\frac{i}{2}}{\sin 1'}$	1,43027		

ГЛАВА V.

Движенiе небеснаго тѣла по параболической орбитѣ.

§ 25. Опредѣленiе положенiя небеснаго тѣла на орбитѣ.

Для любого коническаго сѣченiя интегралъ площадей и уравненiе орбиты въ полярныхъ координатахъ имѣютъ видъ:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k\sqrt{M_{1,2}\, p}\,, \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos v}\,,$$

гдѣ

$$v = \theta - \omega$$

есть уголъ, составляемый радiусомъ-векторомъ небеснаго тѣла съ осью коническаго сѣченiя. Примѣняя эти уравненiя къ параболѣ, мы должны положить:

$$e = 1 \quad \text{и} \quad p = 2q.$$

Тогда получаемъ:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k\sqrt{2M_{1,2}\, q}\,, \quad r = \frac{2q}{1 + \cos v}\,.$$

Замѣтимъ, что и для параболы уголъ v, составляемый радiусомъ-векторомъ небеснаго тѣла съ осью параболы, называется *истинной аномалiей*. Такъ какъ по параболическимъ орбитамъ движутся кометы, обладающiя ничтожными массами въ сравненiи съ массой солнца, то въ предыдущихъ уравненiяхъ можно принять

$$M_{1,2} = m_2 = 1.$$

Далѣе

$$1 + \cos v = 2\cos^2 \frac{1}{2} v.$$

Поэтому предыдущiя уравненiя примутъ видъ:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k\sqrt{2q}\,, \quad r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}\,.$$

Пользуясь этими двумя уравненіями, можно выразить радіусъ-векторъ r и истинную аномалію v въ зависимости отъ времени и, слѣдовательно, опредѣлить положеніе кометы на орбитѣ.

Подставляя въ первое уравненіе вмѣсто радіуса-вектора r его выраженіе, опредѣляемое вторымъ уравненіемъ, получаемъ:

$$\frac{q^2}{\cos^4 \frac{1}{2} v} \frac{dv}{dt} = k\sqrt{2q}$$

или

$$\frac{k\sqrt{2}}{q^{3/2}} dt = \frac{dv}{\cos^4 \frac{1}{2} v}.$$

Помножая вторую часть уравненія на

$$\cos^2 \frac{1}{2} v + \sin^2 \frac{1}{2} v = 1,$$

преобразовываемъ это уравненіе такъ:

$$\frac{k\sqrt{2}}{q^{3/2}} dt = \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} v} + \frac{tg^2 \frac{1}{2} v}{\cos^2 \frac{1}{2} v} \right) dv.$$

Раздѣляя обѣ части уравненія на 2, имѣемъ:

$$\frac{kdt}{q^{3/2}\sqrt{2}} = \left(1 + tg^2 \frac{1}{2} v\right) \frac{d\left(\frac{1}{2} v\right)}{\cos^2 \frac{1}{2} v}.$$

Замѣчая, что

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} v\right)}{\cos^2 \frac{1}{2} v} = d\left(tg \frac{1}{2} v\right),$$

мы послѣ интегрированія получаемъ:

$$\frac{k(t-T)}{q^{3/2}\sqrt{2}} = tg \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} tg^3 \frac{1}{2} v \quad \ldots \ldots \ldots (85)$$

Здѣсь T есть произвольная постоянная, введенная интегрированіемъ. Нетрудно убѣдиться, что T есть время прохожденія кометы черезъ перигелій, такъ какъ при $v = 0$, что бываетъ въ перигеліи, уравненіе (85) даетъ $t = T$.

Когда дано v, то по уравненію (85) легко найти t. Обратное нахожденіе v по данному t изъ трансцендентнаго уравненія (85) представляетъ трудную задачу.

Прежде всего мы покажемъ, что это уравненіе для каждаго значенія t имѣетъ одинъ и только одинъ дѣйствительный корень. Уравненіе (85) можно написать въ видѣ:

$$F(v) = tg\,\frac{1}{2}\,v + \frac{1}{3}\,tg^3\,\frac{1}{2}\,v - \frac{k\,(t-T)}{q^{3/2}\sqrt{2}} = 0$$

Предположимъ, что намъ задано нѣкоторое опредѣленное значеніе t. Допустимъ сперва, что $t > T$, т. е., что $t - T > 0$. Тогда при $v = 0$ будетъ $F(v) < 0$. Далѣе, при измѣненіи v отъ $0°$ до $180°$ функція $F(v)$ все время возрастаетъ и при $v = 180°$ обращается въ $+\infty$. Отсюда слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ уравненіе $F(v) = 0$ имѣетъ одинъ и только одинъ дѣйствительный положительный корень, заключающійся въ предѣлахъ отъ $0°$ до $180°$. Допустимъ теперь, что $t < T$, т. е., что $t - T < 0$. Подобно предыдущему убѣдимся, что въ этомъ случаѣ уравненіе $F(v) = 0$ имѣетъ одинъ и только одинъ дѣйствительный отрицательный корень, заключающійся между предѣлами $0°$ и $-180°$.

Для облегченія рѣшенія уравненія (85) составлены особыя таблицы. Обозначимъ $\frac{k\,(t-T)}{q^{3/2}\sqrt{2}}$ одной буквой M. Тогда для цѣлаго ряда значеній v, отстоящихъ другъ отъ друга, напр., на $1'$ или на $10''$, можно вычислить соотвѣтствующія значенія M или $\log M$. Составивши такую таблицу, можно ею пользоваться также и для опредѣленія v по данному M. Подобныя таблицы можно найти во многихъ курсахъ Теоретической Астрономіи. Прежде чѣмъ пользоваться такими таблицами, необходимо точно опредѣлить, что было обозначено буквой M при построеніи таблицъ, такъ какъ въ этомъ отношеніи таблицы, построенныя различными авторами, отличаются другъ отъ друга. Такъ, Баркеръ составилъ таблицы на основаніи уравненія.

$$M = 75\,tg\,\frac{1}{2}\,v + 25\,tg^3\,\frac{1}{2}\,v,$$

гдѣ

$$M = \frac{75\,k\,(t-T)}{q^{3/2}\sqrt{2}} = [9.9601277]\,\frac{t-T}{q^{3/2}}\,,$$

причемъ число, заключенное въ скобки, есть логариѳмъ. Таблицы, построенныя такимъ образомъ, можно найти между прочимъ въ руководствахъ: 1) *Klinkerfues*. Theoretische Astronomie. Braunschweig. 1912 и 2) *Watson*. Theoretical Astronomy. Philadelphia. 1900.

Опольцеръ же въ своемъ сочиненіи «Traité de la détermination des orbites des comètes et des planètes. Paris. 1886» построилъ таблицы на основаніи уравненія:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{k}\left(tg\,\frac{1}{2}\,v + \frac{1}{2}\,tg^3\,\frac{1}{2}\,v\right),$$

причемъ подъ M здѣсь подразумѣвается слѣдующее выраженіе:

$$M = \frac{t - T}{q^{3/2}}.$$

Очень удобныя таблицы, построенныя на нѣсколько иныхъ основаніяхъ, читатель найдетъ въ трудѣ: *Bauschinger*. Tafeln zur theoretischen Astronomie. Leipzig. 1901.

Когда по данному t опредѣлено v изъ уравненія (85), то опредѣленіе радіуса-вектора r уже не представляетъ никакого затрудненія, и для этого служитъ уравненіе:

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (86)$$

Можетъ случиться, что подъ руками нѣтъ таблицъ, облегчающихъ рѣшеніе уравненія (85). Поэтому покажемъ, какимъ образомъ можно рѣшить это уравненіе непосредственно.

Положимъ

$$tg \frac{1}{2} v = 2 \, cotg \, 2\gamma .$$

Замѣчая, что

$$2 \, cotg \, 2\gamma = \frac{2 \cos 2\gamma}{\sin 2\gamma} = \frac{2 (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)}{2 \sin \gamma \cos \gamma} = cotg \, \gamma - tg \, \gamma,$$

мы можемъ написать:

$$tg \frac{v}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{v}{2} = (cotg \, \gamma - tg \, \gamma) + \frac{1}{3} (cotg \, \gamma - tg \, \gamma)^3.$$

Раскрывая въ правой части кубъ, имѣемъ:

$$tg \frac{v}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{v}{2} = cotg \, \gamma - tg \, \gamma + \frac{1}{3} cotg^3 \gamma - cotg^2 \gamma \, tg \, \gamma +$$

$$+ cotg \, \gamma \, tg^2 \gamma - \frac{1}{3} tg^3 \gamma .$$

Замѣчая, что

$$cotg^2 \gamma \, tg \, \gamma = cotg \, \gamma$$

и

$$cotg \, \gamma \, tg^2 \gamma = tg \, \gamma,$$

послѣ сокращенія получаемъ:

$$tg \frac{v}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{v}{2} = \frac{1}{3} (cotg^3 \gamma - tg^3 \gamma).$$

Теперь введемъ такое обозначеніе:

$$tg\,\gamma = \sqrt[3]{tg\,\beta}.$$

Тогда находимъ

$$tg\,\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\,tg^3\,\frac{v}{2} = \frac{1}{3}\,(cotg\,\beta - tg\,\beta).$$

Но такъ какъ

$$2\,cotg\,2\beta = cotg\,\beta - tg\,\beta,$$

то имѣемъ

$$tg\,\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\,tg^3\,\frac{v}{2} = \frac{2}{3}\,cotg\,2\beta.$$

Слѣдовательно, мы можемъ написать:

$$\frac{2}{3}\,cotg\,2\beta = \frac{k\,(t - T)}{q^{3/2}\sqrt{2}}.$$

Отсюда выводимъ:

$$tg\,2\beta = \frac{2^{3/2}}{3k} \cdot \frac{q^{3/2}}{t - T} = [1{,}7388423]\,\frac{q^{3/2}}{t - T},$$

гдѣ число, заключенное въ скобки, есть логариѳмъ.

Правая часть этого уравненія извѣстна. Вычисливъ отсюда β, найдемъ уголъ γ по формулѣ

$$tg\,\gamma = \sqrt[3]{tg\,\beta},$$

а послѣ этого истинная аномалія получается по формулѣ:

$$tg\,\frac{1}{2}\,v = 2\,cotg\,2\gamma.$$

Найдя v, радіусъ-векторъ r вычислимъ по уравненію (86).

Замѣтимъ, что, считая v отъ 0° до $+180^\circ$ въ одну сторону отъ перигелія и отъ 0° до -180° въ другую сторону, всегда будемъ имѣть:

$$-90^\circ < \frac{1}{2}\,v < +90^\circ.$$

Въ выборѣ четверти, въ которой лежатъ β и γ, тоже не можетъ быть никакого сомнѣнія. Если $t - T > 0$, то 2β и γ лежатъ въ первой четверти; если $t - T < 0$, то въ четвертой.

§ 26. Опредѣленіе положенія небеснаго тѣла въ пространствѣ.

Чтобы опредѣлить положеніе въ пространствѣ небеснаго тѣла, совершающаго движеніе по параболической орбитѣ, очевидно, надо воспользоваться тѣми же самыми формулами, которыя были выведены для небеснаго тѣла, двигающагося по эллиптической орбитѣ, т. е.

$$x = r\,[\cos(v+\omega)\cos\Omega - \sin(v+\omega)\sin\Omega\cos i]$$

$$y = r\,[\cos(v+\omega)\sin\Omega + \sin(v+\omega)\cos\Omega\cos i]$$

$$z = r\,\sin(v+\omega)\sin i\,.$$

Но въ этомъ случаѣ v и r опредѣляются формулами (85) и (86). Теперь намъ остается сопоставить вмѣстѣ всѣ элементы, которыми опредѣляется движеніе по параболической орбитѣ. Такихъ элементовъ пять, а не шесть, какъ для эллиптической орбиты. Въ этомъ случаѣ вмѣсто двухъ элементовъ a и e, изъ которыхъ первый для параболы обращается въ безконечность, а второй равенъ единицѣ, вводится одинъ элементъ, именно *линейное разстояніе q перигелія отъ солнца.*

Пять элементовъ, которыми опредѣляется движеніе небеснаго тѣла по параболической орбитѣ, суть:

i—наклонность плоскости орбиты къ плоскости эклиптики;
Ω—долгота восходящаго узла плоскости орбиты по отношенію къ плоскости эклиптики;
ω—угловое разстояніе перигелія отъ узла;
q—линейное разстояніе перигелія отъ солнца;
T—время прохожденія небеснаго тѣла черезъ перигелій.

О томъ, какъ считаются углы i, Ω и ω, было сказано въ § 18.

Элементы i и Ω опредѣляютъ положеніе плоскости орбиты въ пространствѣ. Элементъ ω опредѣляетъ расположеніе параболической орбиты въ ея плоскости; этотъ элементъ можетъ быть замѣненъ долготой перигелія

$$\pi = \Omega + \omega.$$

Элементъ q характеризуетъ самую параболу. Наконецъ, элементъ T даетъ возможность опредѣлить положеніе небеснаго тѣла на орбитѣ.

Такимъ образомъ *движеніе небеснаго тѣла по параболической орбитѣ опредѣляется пятью элементами.*

§ 27. Теорема Эйлера—Ламберта.

При изученіи движенія небеснаго тѣла по параболической орбитѣ важную роль играетъ теорема Эйлера—Ламберта, связывающая радіусы-

векторы r_1 и r_2, соотвѣтствующіе моментамъ t_1 и t_2, хорду s, стягивающую дугу, описанную небеснымъ тѣломъ въ промежутокъ времени $t_2 - t_1$, и этотъ промежутокъ времени.

Выведемъ эту теорему. Примѣнимъ уравненіе (85) къ двумъ моментамъ времени t_1 и t_2. Тогда будемъ имѣть:

$$\frac{k(t_1 - T)}{q^{3/2}\sqrt{2}} = tg\frac{v_1}{2} + \frac{1}{3}tg^3\frac{v_1}{2},$$

$$\frac{k(t_2 - T)}{q^{3/2}\sqrt{2}} = tg\frac{v_2}{2} + \frac{1}{3}tg^3\frac{v_2}{2}.$$

Для сокращенія письма введемъ такія обозначенія:

$$tg\frac{v_1}{2} = z_1 \quad \text{и} \quad tg\frac{v_2}{2} = z_2.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$\frac{k(t_1 - T)}{q^{3/2}\sqrt{2}} = z_1 + \frac{1}{3}z_1^3, \qquad \frac{k(t_2 - T)}{q^{3/2}\sqrt{2}} = z_2 + \frac{1}{3}z_2^3.$$

Полагая, что $t_2 > t_1$, вычтемъ первое уравненіе изъ второго:

$$\frac{k(t_2 - t_1)}{q^{3/2}\sqrt{2}} = z_2 - z_1 + \frac{1}{3}(z_2^3 - z_1^3).$$

Умножая это уравненіе на 3 и вынося въ правой части за скобки общій множитель $z_2 - z_1$, получаемъ:

$$\frac{3k(t_2 - t_1)}{q^{3/2}\sqrt{2}} = (z_2 - z_1)\,[3 + z_2^2 + z_2 z_1 + z_1^2].$$

Въ правой части въ квадратныхъ скобкахъ прибавимъ $2z_2z_1$ и вычтемъ ту же величину. Тогда предыдущее уравненіе можемъ переписать такъ:

$$\frac{3k(t_2 - t_1)}{q^{3/2}\sqrt{2}} = (z_2 - z_1)\,[3(1 + z_2z_1) + (z_2 - z_1)^2] \quad . \; . \; . \; (87)$$

Въ правой части этого уравненія входятъ двѣ функціи отъ z_1 и z_2, а именно:

$$(1 + z_2z_1) \qquad \text{и} \qquad (z_2 - z_1).$$

Постараемся опредѣлить эти двѣ функціи въ зависимости отъ r_1, r_2 и s.

Обратимся къ рисунку 17. На этомъ рисункѣ представленъ треугольникъ M_2FM_1, вершинами котораго служатъ солнце F и положенія кометы M_2 и M_1, соотвѣтствующія моментамъ t_2 и t_1. Въ этомъ треугольникѣ $M_2M_1 = s$, $FM_2 = r_2$, $FM_1 = r_1$ и

$$\angle M_2FM_1 = v_2 - v_1.$$

По правиламъ плоской тригонометріи имѣемъ:

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(v_2 - v_1).$$

Рис. 17.

Замѣняя

$$\cos(v_2 - v_1)$$

выраженіемъ

$$2\cos^2\frac{v_2 - v_1}{2} - 1,$$

получаемъ:

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 4r_1r_2\cos^2\frac{v_2 - v_1}{2} + 2r_1r_2$$

или

$$s^2 = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2\cos^2\frac{v_2 - v_1}{2}.$$

Отсюда находимъ:

$$2\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{v_2 - v_1}{2} = \pm\sqrt{(r_1 + r_2 + s)(r_1 + r_2 - s)} \quad \ldots \quad (88)$$

Здѣсь *верхній* знакъ (+) надо брать тогда, когда $v_2 - v_1 < 180°$, и *нижній* (—) въ томъ случаѣ, когда $v_2 - v_1 > 180°$. Замѣтимъ, что теорема Эйлера-Ламберта играетъ важную роль при опредѣленіяхъ орбитъ вновь открытыхъ кометъ. Эти опредѣленія дѣлаются на основаніи наблюденій, отдѣленныхъ другъ отъ друга небольшими промежутками времени, и въ этомъ случаѣ $v_2 - v_1$ обыкновенно бываетъ меньше 180°, такъ что несравненно чаще приходится брать *верхній* знакъ (+).

Обозначимъ для краткости

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 + s &= A \\ r_1 + r_2 - s &= B. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

Тогда уравненіе (88) приметъ видъ:

$$2\sqrt{r_1r_2}\cos\frac{v_2 - v_1}{2} = \pm\sqrt{AB} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

Изъ этого уравненія мы можемъ исключить r_1 и r_2 въ лѣвой части при помощи извѣстныхъ соотношеній

$$r_1 = \frac{q}{cos^2 \frac{1}{2} v_1} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{q}{cos^2 \frac{1}{2} v_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (91)$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (90), находимъ:

$$2 \frac{q}{cos \frac{1}{2} v_1 \, cos \frac{1}{2} v_2} \left(cos \frac{1}{2} v_2 \, cos \frac{1}{2} v_1 + sin \frac{1}{2} v_2 \, sin \frac{1}{2} v_1\right) = \pm \sqrt{AB}$$

или

$$2q \left(1 + tg \frac{1}{2} v_2 \, tg \frac{1}{2} v_1\right) = \pm \sqrt{AB}$$

или, согласно съ нашими обозначеніями,

$$2q \, (1 + z_2 z_1) = \pm \sqrt{AB}.$$

Отсюда находимъ функцію $(1 + z_2 z_1)$ въ зависимости отъ A и B, т. е. въ зависимости отъ r_1, r_2 и s, а именно:

$$1 + z_2 z_1 = \pm \frac{\sqrt{AB}}{2q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (92)$$

Теперь, чтобы найти функцію $(z_2 - z_1)$, сложимъ между собою уравненія (91). Тогда получаемъ:

$$r_1 + r_2 = \frac{q}{cos^2 \frac{1}{2} v_1} + \frac{q}{cos^2 \frac{1}{2} v_2}.$$

Но такъ какъ

$$\frac{1}{cos^2 \frac{1}{2} v} = 1 + tg^2 \frac{1}{2} v$$

и такъ какъ $tg \frac{1}{2} v$ мы обозначаемъ буквой z, то находимъ:

$$r_1 + r_2 = q \; [1 + z_1^2 + 1 + z_2^2].$$

Съ другой стороны, складывая между собой уравненія (89), имѣемъ:

$$r_1 + r_2 = \frac{A + B}{2}.$$

Поэтому

$$q \, [2 + z_1^2 + z_2^2] = \frac{A + B}{2}.$$

Прибавляя въ первой части въ квадратныхъ скобкахъ $2 z_1 z_2$ и вычитая ту же величину, предыдущее уравненіе преобразовываемъ такъ:

$$q \, [2 \, (1 + z_1 z_2) + (z_2 - z_1)^2] = \frac{A + B}{2}$$

или

$$(z_2 - z_1)^2 = \frac{A + B}{2q} - 2(1 + z_1 z_2).$$

Имѣя въ виду уравненіе (92), находимъ:

$$(z_2 - z_1)^2 = \frac{A + B}{2q} \mp \frac{2\sqrt{AB}}{2q} \quad \ldots \ldots \ldots (93)$$

Это можно представить въ такомъ видѣ:

$$(z_2 - z_1)^2 = \frac{(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})^2}{2q}.$$

Извлекая квадратный корень, получаемъ:

$$z_2 - z_1 = \frac{\sqrt{A} \mp \sqrt{B}}{\sqrt{2q}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (94)$$

Здѣсь при извлеченіи квадратнаго корня мы взяли вторую часть уравненія положительной, такъ какъ при нашемъ предположеніи, что $t_2 > t_1$, должно быть $z_2 > z_1$ или $z_2 - z_1 > 0$.

Теперь остается выраженія (92), (93) и (94) подставить въ уравненіе (87).

Тогда получаемъ:

$$\frac{3k(t_2 - t_1)}{q^{3/2}\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{A} \mp \sqrt{B}}{\sqrt{2q}}\right)\left[\pm 3\frac{\sqrt{AB}}{2q} + \frac{A + B}{2q} \mp \frac{2\sqrt{AB}}{2q}\right].$$

Послѣ приведенія и сокращенія находимъ:

$$6k(t_2 - t_1) = (\sqrt{A} \mp \sqrt{B})[A + B \pm \sqrt{AB}].$$

Перемноженіе даетъ:

$$6k(t_2 - t_1) = A\sqrt{A} \mp A\sqrt{B} + B\sqrt{A} \mp B\sqrt{B} \pm A\sqrt{B} - B\sqrt{A},$$

или

$$6k(t_2 - t_1) = A^{3/2} \mp B^{3/2}.$$

Подставляя вмѣсто A и B ихъ выраженія (89), окончательно получаемъ:

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2} \quad \ldots (95)$$

Это уравненіе и выражаетъ собою теорему Эйлера-Ламберта.

Еще разъ напомнимъ, что *верхній* знакъ (—) надо брать тогда, когда $v_2 - v_1 < 180°$, а *нижній* (+) тогда, когда $v_2 - v_1 > 180°$. Замѣтимъ, что разность $v_2 - v_1$ въ теченіе небольшого промежутка времени, каковой обыкновенно встрѣчается на практикѣ при пользованіи

уравненіемъ Эйлера-Ламберта, можетъ сдѣлаться больше 180° только въ томъ случаѣ, когда разстояніе q перигелія отъ солнца есть очень малая величина.

Обратимъ вниманіе на то, что въ уравненіе Эйлера-Ламберта (95) элементъ q совершенно не входитъ.

Какимъ образомъ надо пользоваться уравненіемъ Эйлера-Ламберта, объ этомъ будетъ сказано въ главѣ объ опредѣленіи параболическихъ орбитъ изъ наблюденій.

УПРАЖНЕНІЯ.

Задача № 13. Для кометы, движущейся по параболической орбитѣ, дано $\log q = 9{,}5190730$ и $t - T = -36{,}55397$ дней. Найти v и $\log r$.

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи воспользуемся формулами

$$tg\,2\beta = [1{,}7388423]\,\frac{q^{3/2}}{t-T};\quad tg\,\gamma = \sqrt[3]{tg\,\beta};$$

$$tg\,\frac{1}{2}v = 2\,cotg\,2\gamma;\quad r = \frac{q}{\cos^2\frac{1}{2}v}.$$

Вычисленія располагаемъ такъ:

$q^{1/2}$	9,7595365	γ	$-\ 27°25'\ 9'',03$
$q^{3/2}$	9,2786095	2γ	$-\ 54°50'18'',06$
$t-T$	$1{,}5629345_n$	$cotg\,2\gamma$	$9{,}8478320_n$
$q^{3/2} : (t-T)$	$7{,}7156750_n$	$tg\,\frac{1}{2}v$	$0{,}1488620_n$
$tg\,2\beta$	$9{,}4545173_n$	$\frac{1}{2}v$	$-\ 54°37'57'',87$
2β	$-\ 15°53'46'',20$	v	$-\ 109°15'55'',74$
β	$-\ 7°56'53'',10$	$\cos\frac{1}{2}v$	9,7625400
$tg\,\beta$	$9{,}1449381_n$	$\cos^2\frac{1}{2}v$	9,5250800
$tg\,\gamma$	$9{,}7149794_n$	r	9,9939930

ГЛАВА VI.

Движеніе небеснаго тѣла по гиперболической орбитѣ.

§ 28. Опредѣленіе положенія небеснаго тѣла на гиперболической орбитѣ.

Уравненіе любого коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ имѣетъ видъ:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}.$$

Точно также для любого коническаго сѣченія интегралъ площадей мы можемъ написать въ видѣ:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{M_{1,2} \cdot p},$$

причемъ p есть полупараметръ коническаго сѣченія, e — эксцентриситетъ, а v — уголъ, составляемый радіусомъ-векторомъ небеснаго тѣла съ осью коническаго сѣченія.

Мы знаемъ, что для гиперболы эксцентриситетъ $e > 1$ и $p = a(e^2 - 1)$. Предыдущія два уравненія для гиперболы принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{a(e^2-1)}{1 + e \cos v}, \\ r^2 \frac{dv}{dt} &= k \sqrt{a(e^2-1)}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (96)$$

причемъ мы приняли $M_{1,2} = 1$ по той же причинѣ, по которой это было сдѣлано для параболическихъ орбитъ.

Уголъ v для гиперболической орбиты совершенно такъ же, какъ для эллиптической и параболической, носитъ названіе *истинной аномаліи.*

Въ случаѣ гиперболической орбиты комета движется, конечно, только по одной вѣтви гиперболы, именно по той, которая охватываетъ фокусъ, занятый солнцемъ.

Пользуясь уравненіями (96), можно выразить радіусъ-векторъ r и истинную аномалію v въ зависимости отъ времени t и, слѣдовательно, опредѣлить положеніе небеснаго тѣла на его орбитѣ.

Прежде всего посмотримъ, въ какихъ предѣлахъ можетъ мѣняться v въ случаѣ гиперболической орбиты.

Обозначимъ буквой ψ уголъ BOA, образуемый ассимптотой гиперболы съ осью, пересѣкающей гиперболу (рис. 18). Въ такомъ случаѣ изъ треугольника BOA, въ которомъ

$$OA = a,\ AB = b,\ OB = \sqrt{a^2 + b^2} = ae$$

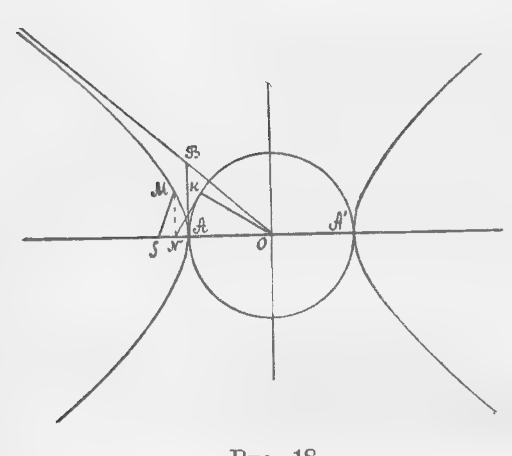


Рис. 18.

и уголъ $$BOA = \psi,$$

имѣемъ: $$1 = e \cos \psi.$$

Вводя уголъ ψ, мы можемъ уравненію гиперболы въ полярныхъ координатахъ придать такой видъ:

$$r = \frac{p}{1 + \frac{\cos v}{\cos \psi}} = \frac{p \cos \psi}{\cos \psi + \cos v}.$$

Отсюда мы видимъ, что r обращается въ безконечность при

$$\cos v = - \cos \psi$$

или при

$$v = \pm (180^\circ - \psi).$$

Слѣдовательно v для гиперболы измѣняется отъ $-(180^\circ - \psi)$ до $+(180^\circ - \psi)$, причемъ никогда не можетъ обратиться въ 180°. Для параболы же $\psi = 0$, и при $r = \infty$ истинная аномалія обращается въ $\pm 180^\circ$.

Далѣе, для облегченія рѣшенія нашей задачи введемъ вспомогательную перемѣнную F на основаніи слѣдующихъ геометрическихъ соображеній. Построимъ на оси AA' (рис. 18), какъ на діаметрѣ, окружность круга. Изъ положенія M кометы на орбитѣ опустимъ перпендикуляръ MN на ось SAA'. Изъ точки N пересѣченія перпендикуляра съ осью проведемъ касательную NK къ окружности упомянутаго круга. Назовемъ уголъ KON буквой F и примемъ этотъ уголъ за новую перемѣнную. Найдемъ связь между r и F. Первое изъ уравненій (96) даетъ:

$$r + re \cos v = ae^2 - a \quad \text{. . . . . (97)}$$

Изъ треугольника SMN имѣемъ, что

$$SN = r \cos v.$$

Кромѣ того, SN можетъ быть выражено въ видѣ разности $SO - NO$. Но $SO = ae$, а NO изъ треугольника NKO выражается такъ:

$$NO = \frac{a}{\cos F}.$$

Поэтому

$$SN = ae - \frac{a}{\cos F}.$$

Сравнивая два выраженія для SN, имѣемъ:

$$r \cos v = ae - \frac{a}{\cos F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (98)$$

Послѣ этого уравненіе (97) принимаетъ видъ:

$$r + ae^2 - \frac{ae}{\cos F} = ae^2 - a$$

или

$$r = a\left(\frac{e}{\cos F} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (99)$$

Нетрудно убѣдиться, что r будетъ выражаться такой формулой, въ какой бы части орбиты комета ни находилась.

Теперь надо вывести формулу, по которой можно было бы вычислить v, когда извѣстно F.

Мы выведемъ систему формулъ, опредѣляющихъ одновременно r и v.

Радіусъ-векторъ можетъ быть выраженъ или первымъ изъ уравненій (96), или уравненіемъ (99). Сравнивая эти два выраженія радіуса-вектора, имѣемъ:

$$\frac{e^2 - 1}{1 + e \cos v} = \frac{e - \cos F}{\cos F}.$$

Отсюда получаемъ:

$$1 + e \cos v = \frac{(e^2 - 1) \cos F}{e - \cos F},$$

или

$$e \cos v = \frac{e^2 \cos F - \cos F - e + \cos F}{e - \cos F}.$$

Окончательно $\cos v$ выражается въ зависимости отъ $\cos F$ такимъ образомъ:

$$\cos v = \frac{e \cos F - 1}{e - \cos F}.$$

Составимъ теперь $1 + \cos v$ и $1 - \cos v$. Имѣемъ:

$$1 + \cos v = \frac{e - \cos F + e \cos F - 1}{e - \cos F} = \frac{(e-1)(1+\cos F)}{e - \cos F}$$

$$1 - \cos v = \frac{e - \cos F - e \cos F + 1}{e - \cos F} = \frac{(e+1)(1-\cos F)}{e - \cos F}.$$

Замѣчая, что

$$1 + \cos v = 2 \cos^2 \frac{1}{2} v, \quad 1 - \cos v = 2 \sin^2 \frac{1}{2} v,$$

$$1 + \cos F = 2 \cos^2 \frac{1}{2} F, \quad 1 - \cos F = 2 \sin^2 \frac{1}{2} F,$$

и имѣя въ виду, что $\frac{1}{2} v$ и $\frac{1}{2} F$ всегда одновременно лежатъ или въ первой четверти или въ послѣдней, находимъ:

$$\sin \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{e+1} \sin \frac{F}{2}}{\sqrt{e - \cos F}}, \quad \cos \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{e-1} \cos \frac{F}{2}}{\sqrt{e - \cos F}}.$$

Умножая лѣвыя части этихъ уравненій на $\sqrt{r}$, а правыя на равную ему величину $\frac{\sqrt{a(e - \cos F)}}{\sqrt{\cos F}}$ будемъ окончательно имѣть слѣдующія формулы для опредѣленія r и v по данному F:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{r} \sin \frac{v}{2} &= \frac{\sqrt{a(e+1)} \sin \frac{F}{2}}{\sqrt{\cos F}} \\ \sqrt{r} \cos \frac{v}{2} &= \frac{\sqrt{a(e-1)} \cos \frac{F}{2}}{\sqrt{\cos F}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (100)$$

Если же r опредѣлено по уравненію (99), то v можно вычислить по уравненію:

$$tg \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\, tg \frac{F}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots (101)$$

которое получается черезъ раздѣленіе перваго изъ уравненій (100) на второе. При этомъ не можетъ быть никакого сомнѣнія относительно опредѣленія четверти, въ которой лежитъ уголъ $\frac{v}{2}$.

Такимъ образомъ, если для любого момента t намъ будетъ извѣстно значеніе F, то формулы, выведенныя въ настоящемъ параграфѣ, дадутъ возможность опредѣлить положеніе кометы на гиперболической орбитѣ.

§ 29. Опредѣленіе перемѣнной F въ функціи времени t.

Теперь намъ остается вывести зависимость перемѣнной F отъ времени t. Для этой цѣли воспользуемся вторымъ изъ уравненій (96), которое перепишемъ такъ:

$$r^2\,dv = k\sqrt{a\,(e^2 - 1)}\,dt \quad \ldots\ldots\ldots (102)$$

Дифференцируя уравненіе (101), имѣемъ:

$$\frac{dv}{\cos^2\frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\frac{dF}{\cos^2\frac{F}{2}}$$

Или

$$dv = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\frac{\cos^2\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{F}{2}}\,dF.$$

Второе изъ уравненій (100) даетъ:

$$\frac{\cos\frac{v}{2}}{\cos\frac{F}{2}} = \frac{\sqrt{a\,(e-1)}}{\sqrt{r\cos F}} \quad \ldots\ldots\ldots (103)$$

Но такъ какъ

$$r = a\left(\frac{e}{\cos F} - 1\right) = \frac{a\,(e - \cos F)}{\cos F},$$

то имѣемъ:

$$\frac{\cos\frac{v}{2}}{\cos\frac{F}{2}} = \frac{\sqrt{e-1}}{\sqrt{e - \cos F}}.$$

Поэтому

$$dv = \frac{\sqrt{e^2-1}}{e - \cos F}\,dF.$$

Подставляя это выраженіе dv въ уравненіе (102), и замѣняя въ этомъ уравненіи r его выраженіемъ въ зависимости отъ F, получаемъ:

$$\frac{a^2\,(e - \cos F)\sqrt{e^2-1}}{\cos^2 F}\,dF = k\sqrt{a\,(e^2-1)}\,dt$$

или

$$\left(\frac{e}{\cos^2 F} - \frac{1}{\cos F}\right)dF = \frac{k}{a^{3/2}}\,dt \quad \ldots\ldots\ldots (104)$$

Вводя для сокращенія письма обозначеніе

$$n = \frac{k}{a^{3/2}},$$

будемъ имѣть:

$$\left(\frac{e}{\cos^2 F} - \frac{1}{\cos F}\right) dF = ndt.$$

Такъ какъ

$$\cos F = \sin(90^\circ + F) = 2 \sin\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right) \cos\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right) =$$

$$= 2\, tg\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right) \cos^2\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right),$$

то предыдущее уравненіе можемъ переписать въ видѣ:

$$\frac{edF}{\cos^2 F} - \frac{\frac{1}{2} dF}{tg\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right) \cos^2\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right)} = ndt.$$

Интегрируя, получаемъ:

$$e\, tg\, F - \log_e tg\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right) = n\,(t - T), \quad . \; . \; . \; . \; (105)$$

гдѣ T есть постоянная произвольная, введенная интегрированіемъ и представляющая собою время прохожденія кометы черезъ перигелій, и $\log_e$ есть Неперовъ логариѳмъ. Найдя F по уравненію (105), мы вычислимъ r и v по формуламъ предыдущаго параграфа.

§ 30. Рѣшеніе уравненія, дающаго зависимость F отъ времени t.

Зависимость угла F отъ времени t представляется уравненіемъ (105). Въ это уравненіе входитъ Неперовъ логариѳмъ $\log_e tg\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right)$.

Чтобы перейти къ обыкновеннымъ логариѳмамъ, умножимъ все уравненіе на модуль Бригговыхъ логариѳмовъ $\lambda = 0{,}4342945$ ($\log \lambda = 9{,}6377843$). Тогда получимъ:

$$\lambda\, e\, tg\, F - \log tg\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right) = \lambda n\,(t - T),$$

причемъ входящій въ это уравненіе логариѳмъ есть обыкновенный (десятичный) логариѳмъ.

Обозначая $\lambda n\,(t - T)$ одной буквой M, имѣемъ:

$$\lambda e\, tg\, F - \log tg\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right) = M \quad . \; . \; . \; . \; . \; (106)$$

Прежде всего покажемъ, что это уравненіе для даннаго M или, что то же, для даннаго t имѣетъ одинъ и только одинъ вещественный корень, заключающійся въ предѣлахъ отъ $F = 0^\circ$ до $F = +90^\circ$ или въ предѣлахъ отъ $F = 0^\circ$ до $F = -90^\circ$.

Уравненіе (106) мы можемъ представить въ видѣ:

$$\varphi(F) = \lambda e \, tg\, F - log\, tg\left(45^\circ + \frac{1}{2}F\right) - M = 0.$$

Положимъ сначала, что $t > T$ и слѣдовательно $M > 0$. Въ такомъ случаѣ при $F = 0$ имѣемъ $\varphi(F) < 0$. Если же вмѣсто F подставить $+90^\circ$, то будемъ имѣть $\varphi(F) = +\infty$. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ написать:

$$\varphi(F) = tg\, F\left[\lambda e - \frac{log\, tg\left(45^\circ + \frac{1}{2}F\right)}{tg\, F}\right] - M.$$

При $F = +90^\circ$ имѣемъ

$$tg\, F = +\infty;$$

двучленъ же

$$\lambda e - \frac{log\, tg\left(45^\circ + \frac{1}{2}F\right)}{tg\, F},$$

если по правиламъ дифференціальнаго исчисленія раскроемъ неопредѣленность $\left[\frac{log\, tg\left(45^\circ + \frac{1}{2}F\right)}{tg\, F}\right]_{F=90^\circ}$, обращается въ λe. Поэтому, дѣйствительно, при $F = +90^\circ$ получаемъ $\varphi(F) = +\infty$. Составимъ производную отъ функціи $\varphi(F)$. Она будетъ

$$\varphi'(F) = \frac{\lambda e}{cos^2 F} - \frac{\lambda}{cos\, F} = \frac{\lambda}{cos\, F}\left(\frac{e}{cos\, F} - 1\right).$$

При всѣхъ значеніяхъ F, удовлетворяющихъ условію $0^\circ < F < +90^\circ$, имѣемъ $\varphi'(F) > 0$, такъ какъ $e > 1$. На основаніи предыдущихъ разсужденій заключаемъ, что уравненіе $\varphi(F) = 0$ при условіи $t > T$ имѣетъ одинъ и только одинъ вещественный положительный корень, удовлетворяющій условію $0^\circ < F < +90^\circ$.

Совершенно также убѣдимся, что при $t < T$ уравненіе $\varphi(F) = 0$ имѣетъ одинъ и только одинъ вещественный отрицательный корень, удовлетворяющій условію $0^\circ > F > -90^\circ$.

Теперь обратимся къ рѣшенію уравненія (106). Приближенное значеніе F, удовлетворяющее этому уравненію, легко можно найти, пользуясь графическимъ способомъ.

Уравненіе (106) можно представить въ видѣ:

$$\lambda e \, tg \, F - M = log \, tg \left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right).$$

Положимъ, что мы имѣемъ два уравненія:

$$\left.\begin{array}{l} y = \lambda e \, tg \, F - M \\ y = log \, tg \left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right). \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (107)$$

Если по оси OX (рис. 19) мы будемъ откладывать F, полагая, напр., по 10 миллим. на каждые 20°, а по оси OY ординаты, вычисляемыя по уравненіямъ (107), то мы по полученнымъ такимъ образомъ точкамъ можемъ построить кривыя CD и AB, выражаемыя уравненіями (107). При этомъ построеніи вертикальный масштабъ можетъ быть выбранъ по произволу. Кромѣ того, необходимо замѣтить, что въ первомъ изъ уравненій (107) e представляетъ отвлеченное число. Кривыя CD и AB пересѣкаются въ точкѣ F. Абсцисса точки пересѣченія этихъ кривыхъ и есть то значеніе перемѣнной F, которое должно удовлетворять уравненію (106). Однако графическое построеніе не можетъ дать точнаго значенія F, и въ зависимости отъ масштаба чертежа найденное нами значеніе F_1 будетъ болѣе или менѣе отличаться отъ истиннаго значенія. Чтобы найти болѣе точное значеніе F, будетъ искать поправку ΔF_1 къ F_1. Для этого продифференцируемъ уравненіе (106). Имѣемъ:

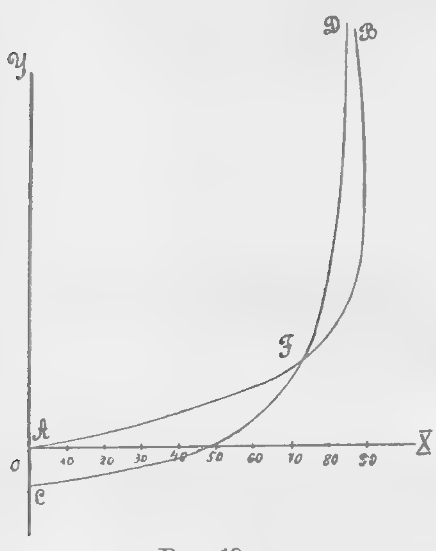


Рис. 19.

$$dM = \frac{\lambda}{cos^2 F} (e - cos \, F) \, dF.$$

Подобно тому, какъ и при рѣшеніи уравненія Кеплера, поправку ΔF_1 найдемъ по уравненію:

$$\Delta F_1 = \frac{(M - M_1) \, cos^2 F_1}{\lambda (e - cos \, F_1)},$$

гдѣ M_1 есть результатъ подстановки F_1 въ уравненіе (106), т. е.

$$M_1 = \lambda e \, tg \, F_1 - log \, tg \left(45^\circ + \frac{1}{2} F_1\right),$$

и кромѣ того разность $(M - M_1)$ должна быть выражена въ угловой мѣрѣ.

Болѣе точное значеніе величины F будетъ

$$F'_2 = F_1 + \Delta F_1.$$

Вычисленіе такого рода поправокъ надо продолжать до тѣхъ поръ, пока, наконецъ, не получится точное значеніе F, удовлетворяющее уравненію (106).

§ 31. Опредѣленіе положенія небеснаго тѣла въ пространствѣ.

Если небесное тѣло движется по гиперболической орбитѣ, то его положеніе въ пространствѣ опредѣляется тѣми же самыми формулами (63), которыя были выведены для небеснаго тѣла, двигающагося по эллиптической орбитѣ; только r и v при этомъ должны быть вычислены по формуламъ, выведеннымъ въ этой главѣ. Замѣтимъ, что формулѣ (101) можно придать нѣсколько другой видъ. Такъ какъ $e \cos \psi = 1$, то мы имѣемъ:

$$\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = \sqrt{\frac{1+\cos\psi}{1-\cos\psi}} = \sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\psi}{2}}{2\sin^2\frac{\psi}{2}}} = cotg\,\frac{\psi}{2} = tg\left(90^\circ - \frac{\psi}{2}\right).$$

Поэтому можемъ написать:

$$tg\,\frac{v}{2} = tg\left(90^\circ - \frac{\psi}{2}\right) tg\,\frac{F}{2}$$

Необходимо замѣтить, что *движеніе небеснаго тѣла по гиперболической орбитѣ опредѣляется шестью элементами*, и эти элементы суть тѣ же самые, какъ и въ случаѣ движенія небеснаго тѣла по эллиптической орбитѣ.

УПРАЖНЕНІЯ.

Задача № 14. Для небеснаго тѣла, движущагося по гиперболической орбитѣ, опредѣлить радіусъ-векторъ r и истинную аномалію v по слѣдующимъ даннымъ:

$$t - T = 65{,}412 \text{ ср. сутокъ}$$
$$log\, e = 0{,}10102$$
$$log\, a = 0{,}60206.$$

Рѣшеніе. Прежде всего мы находимъ величины

$$M = \frac{\lambda k}{a^{3/2}}(t - T) \text{ и } \lambda e,$$

где $\lambda = [9{,}63778]$

есть модуль десятичныхъ логариѳмовъ.

Имѣемъ:

a	0,60206	λ	9,63778
a^3	1,80618	e	0,10102
$a^{3/2}$	0,90309	λe	9,73880
λ	9,63778	$\lambda e =$	0,548
k	8,23558		
$t - T$	1,81565		
M	8,78592		
$M =$	0,06108		

Теперь намъ надо опредѣлить значенiе вспомогательнаго угла F изъ извѣстнаго трансцендентнаго уравненiя:

$$\lambda e\, tg\, F - M = log\, tg\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right),$$

которое въ данномъ случаѣ принимаетъ видъ:

$$0{,}548\, tg\, F - 0{,}06108 = log\, tg\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right).$$

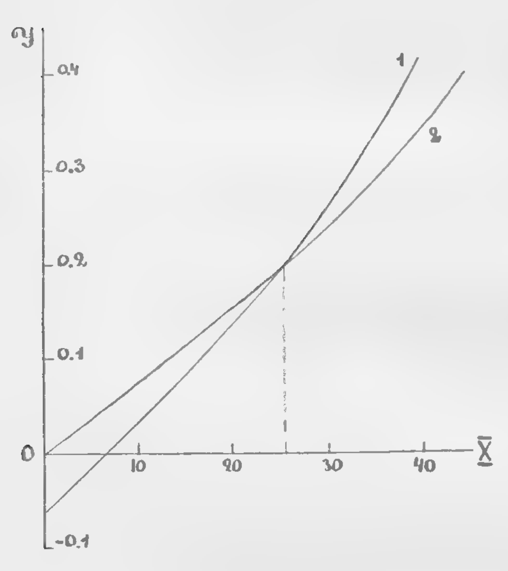


Рис. 20.

Приближенное значенiе искомаго корня найдется графическимъ способомъ. Именно надо построить по нѣсколькимъ точкамъ кривыя линiи, изображаемыя уравненiями:

$$y_1 = 0{,}548\ tg\ F - 0{,}061$$

$$y_2 = log\, tg\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right).$$

Абсцисса точки пересѣченiя этихъ кривыхъ и будетъ представлять искомый корень.

Первое построенiе (рис. 20) выполняемъ въ мелкомъ масштабѣ, при чемъ строимъ наши кривыя по слѣдующимъ точкамъ:

F	y_1	y_2
0°	— 0,06	0,00
10	+ 0,04	+ 0,08
20	+ 0,14	+ 0,16
30	+ 0,26	+ 0,24
40	+ 0,40	+ 0,33.

Изъ этого построенiя видно, что искомый корень равенъ приблизительно 25°.

Поэтому при второмъ построеніи (рис. 21), которое выполняемъ въ болѣе крупномъ масштабѣ, ограничиваемся промежуткомъ отъ 23° до 27°. Именно строимъ наши кривыя по слѣдующимъ точкамъ:

F	y_1	y_2
23°	0,171	0,179
24	0,183	0,187
25	0,195	0,196
26	0,206	0,204
27	0,218	0,213.

Второе построеніе даетъ для искомаго корня значеніе 25°.3.

Такимъ образомъ съ помощью графическаго способа мы нашли слѣдующее приближенное значеніе угла F:

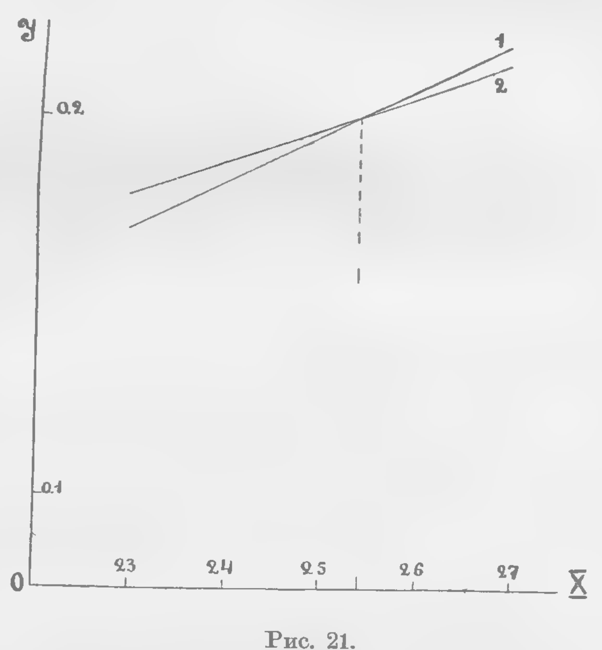


Рис. 21.

$$F_1 = 25°18',0.$$

Для нахожденія болѣе точнаго значенія F обращаемся къ способу послѣдовательныхъ приближеній, при чемъ будемъ пользоваться формулами:

$$M_1 = \lambda e\, tg\, F_1 - log\, tg\left(45° + \frac{1}{2} F_1\right)$$

$$\Delta F_1 = \frac{(M - M_1) \cos^2 F_1}{\lambda (e - \cos F_1) \sin 1'}$$

$$F_2 = F_1 + \Delta F_1$$

$$M_2 = \lambda e\, tg\, F_2 - log\, tg\left(45° + \frac{1}{2} F_2\right)$$

$$\Delta F_2 = \frac{(M - M_2) \cos^2 F_2}{\lambda (e - \cos F_2) \sin 1'}$$

$$F_3 = F_2 + \Delta F_2$$

и т. д. до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до такого значенія $F = F_n$, что

$$M_n = \lambda e\, tg\, F_n - log\, tg\left(45° + \frac{1}{2} F_n\right) = M.$$

Самыя вычисленія расположатся слѣдующимъ образомъ:

F_1	$25°18',0$	e	0,10102	F_2	$25°24',3$
$\frac{1}{2}F_1$	12 39 ,0	$\cos F_1$	9,95621	$\frac{1}{2}F_2$	12 42 ,15
$45° + \frac{1}{2}F_1$	57 39 ,0	*arg.*	0,14481	$45° + \frac{1}{2}F_2$	57 42 ,15
$tg\, F_1$	9,67458	*soustr.*	0,54738	$tg\, F_2$	9,67664
λe	9,73880	$e - \cos F_1$	9,55364	λe	9,73880
$\lambda e\, tg\, F_1$	9,41338	λ	9,63778	$\lambda e\, tg\, F_2$	9 41544
$\lambda e\, tg\, F_1$	0,25905	$\sin 1'$	6,46373	$\lambda e\, tg\, F_2$	0,26028
$\log tg\left(45 + \frac{1}{2}F_1\right)$	0,19832	знам.	5,65515	$\log tg\left(45 + \frac{1}{2}F_2\right)$	0,19920
M_1	0,06073	$M - M_1$	6,54407	M_2	0,06108
M	0,06108	$\cos^2 F_1$	9,91242		
$M - M_1$	0,00035	ΔF_1	0,80134		
		ΔF_1	$6',3$		
		F_1	$25°18',0$		
		F_2	25 24 ,3		

Такъ какъ $M_2 = M$, то окончательное значеніе F есть:

$$F = 25°24',3.$$

Наконецъ, для вычисленія r и v служатъ формулы:

$$r - a\left[\frac{e}{\cos F} - 1\right]$$

$$tg\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\, tg\,\frac{F}{2}.$$

Имѣемъ:

F	$25°24',3$	*add.*	0,25345
$\frac{1}{2}F$	12 42 ,15	e	0,10102
		soustr.	0,68291
e	0,10102	$e+1$	0,35447
$\cos F$	9,95583	$e-1$	9,41811
arg.	0,14519	$(e+1):(e-1)$	0,93636
soustr.	0,54642	$\sqrt{\ }$	0,46818
[ ]	9,59877	$tg\,\frac{1}{2}F$	9,35297
a	0,60206	$tg\,\frac{1}{2}v$	9,82115
r	0,20083	$\frac{1}{2}v$	$33°31',33$
		v	67 2 ,7

Итакъ, мы получаемъ:

$$\log r = 0,20083$$
$$v = 67°2',7$$

ГЛАВА VII.

Вычисленіе эфемериды небеснаго тѣла.

§ 32. Вычисленіе эфемериды небеснаго тѣла, совершающаго движеніе по эллиптической орбитѣ.

Эфемеридо небеснаго тѣла называется рядъ его положеній д... р вноот тоящи... оментовъ. Даваемыя въ эфемеридѣ положенія н бе... наг... ла почти всегда опредѣляются его прямымъ восхожденi... и ... оненіем . Эфемерида играетъ важную роль при отысканіи небе наго тѣла на небѣ съ цѣлью его наблюденія.

Положимъ, что интересующее насъ небесное тѣло движетс по ...липтическои орбитѣ. Въ такомъ случаѣ его движеніе опредѣляетс... шестью э...ементами i, Ω, ω, a, e и T. Покажемъ, как вычислить п... ...женіе небеснаго тѣла д я произвольнаго омента ... Пр...жде ... уравненію Кеплера

$$E - e \sin E = n (t - T),$$

въ которомъ n есть среднее суточное движеніе небеснаго тѣла, вы...ис- ляемъ эксцентрическую аномалію E. Далѣе по формуламъ

$$r = a (1 - e \cos E), \quad tg \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg \ _2 \ E$$

...р д...ляемъ радіусъ-векторъ r и истинную анома...ію ...

З тѣмъ намъ надо вычислить прямолинейныя прямоугольныя коор...и- нат... небеснаго тѣла по отношенію къ такой системѣ координатъ, в... которой за плоскость XOY принята плоскость экватора и въ ...отор... ...ачало координатъ совпадаетъ съ центромъ земли. Выведемъ форму... с...ужащія для опредѣленія такихъ прямолинейныхъ прямоугольныхъ коор- динатъ. Для этого мы будемъ исходить изъ формулъ, служащихъ д... опредѣленія простѣйшихъ прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ а именно координатъ, отнесенныхъ къ такой системѣ, въ которой з

плоскость XOY принята плоскость орбиты и начало координатъ совпадаетъ съ центромъ солнца, и для достиженія нашей цѣли будемъ пользоваться даваемыми въ аналитической геометріи формулами перехода отъ одной системы координатъ къ другой.

Если за плоскость X_0OY_0 принять плоскость орбиты и ось OX_0 направить въ точку восходящаго узла, то координаты x_0, y_0, z_0 небеснаго тѣла представятся формулами:

$$x_0 = r\cos(v + \omega),$$
$$y_0 = r\sin(v + \omega),$$
$$z_0 = 0.$$

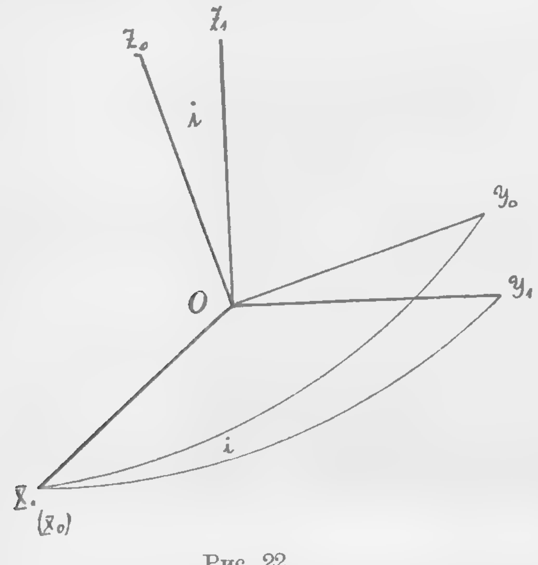


Рис. 22.

Повернемъ нашу систему осей вокругъ оси OX_0 на уголъ i такъ, чтобы въ новой системѣ плоскость X_1OY_1 совпадала съ плоскостью эклиптики. Ось OX_1 попрежнему направлена въ точку восходящаго узла; ось OY_1 направлена въ точку, долгота которой равна $90° + \Omega$ (рис. 22). Формулы перехода отъ старыхъ координатъ къ новымъ будутъ:

$$x_1 = x_0,$$
$$y_1 = y_0 \cos i - z_0 \sin i,$$
$$z_1 = y_0 \sin i + z_0 \cos i.$$

Подставляя сюда вмѣсто x_0, y_0, z_0 ихъ выраженія, находимъ:

$$x_1 = r\cos(v + \omega),$$
$$y_1 = r\sin(v + \omega)\cos i,$$
$$z_1 = r\sin(v + \omega)\sin i.$$

Повернемъ теперь систему осей вокругъ оси OZ_1 на уголъ Ω такъ, чтобы новая ось OX была направлена въ точку весенняго равноденствія (рис. 23). Тогда формулы перехода отъ координатъ x_1, y_1, z_1 къ координатамъ x, y, z будутъ:

$$x = x_1 \cos \Omega - y_1 \sin \Omega$$
$$y = x_1 \sin \Omega + y_1 \cos \Omega$$
$$z = z_1.$$

Подставляя сюда вмѣсто x_1, y_1, z_1 найденныя выше ихъ выраженія, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\,[\cos(v+\omega)\cos\Omega - \sin(v+\omega)\sin\Omega\cos i] \\ y &= r\,[\cos(v+\omega)\sin\Omega + \sin(v+\omega)\cos\Omega\cos i] \\ z &= r\sin(v+\omega)\sin i. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (108)$$

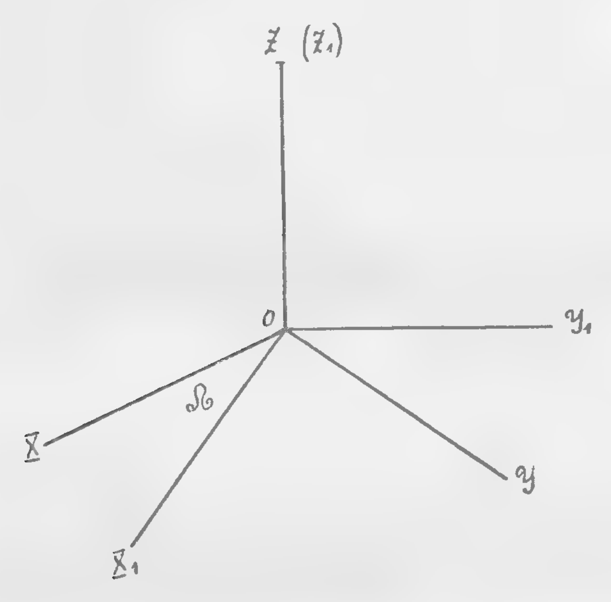


Рис. 23.

Формулы (108) опредѣляютъ *прямолинейныя прямоугольныя геліоцентрическія эклиптикальныя координаты.*

Эти формулы уже были нами выведены въ § 18, только инымъ путемъ.

Придадимъ формуламъ (108) болѣе простой видъ. Для этой цѣли введемъ слѣдующія вспомогательныя величины:

$$\left.\begin{aligned} \sin a\ \sin A &= \cos\Omega \\ \sin a\ \cos A &= -\sin\Omega\cos i \\ \sin b\ \sin B &= \sin\Omega \\ \sin b\ \cos B &= \cos\Omega\cos i. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (109)$$

Поставимъ условіе, чтобы всегда брать

$$\sin a > 0 \qquad \text{и} \qquad \sin b > 0.$$

Тогда углы A и B опредѣлятся безъ всякой двойственности. Что же касается угловъ a и b, то для нихъ мы можемъ по предыдущимъ фор-

муламъ опредѣлить только синусы. Но въ настоящемъ случаѣ для насъ этого совершенно достаточно.

Имѣя въ виду формулы (109), мы формулы (108) преобразуемъ такъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin a \; \sin (A + v + \omega) \\ y &= r \sin b \; \sin (B + v + \omega) \\ z &= r \sin i \; \sin (v + \omega). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (110)$$

Постоянныя A, B, a, b называются *эклиптикальными Гауссовыми постоянными.* Замѣтимъ, что третье изъ уравненій (110) легко можно представить въ такомъ же видѣ, какъ и первыя два, а именно:

$$z = r \sin c \; \sin (C + v + \omega),$$

причемъ

$$c = i, \qquad C = 0.$$

Теперь, имѣя въ виду, что наблюденія обыкновенно даютъ координаты небесныхъ тѣлъ, отнесенныя къ плоскости экватора, перейдемъ отъ эклиптикальныхъ прямоугольныхъ координатъ къ экваторіальнымъ. Для этого повернемъ предыдущую систему осей вокругъ оси OX на уголъ ε, равный наклонности экватора къ эклиптикѣ (рис. 24) и заключающій приблизительно $23°27'$. Въ такомъ случаѣ въ новой системѣ координатъ за плоскость $X'OY'$ будетъ принята плоскость экватора, ось OX' будетъ направлена въ точку весенняго равноденствія, а ось OY'—въ точку, прямое восхожденіе которой равно $90°$. Формулы перехода отъ прежнихъ координатъ къ новымъ будутъ:

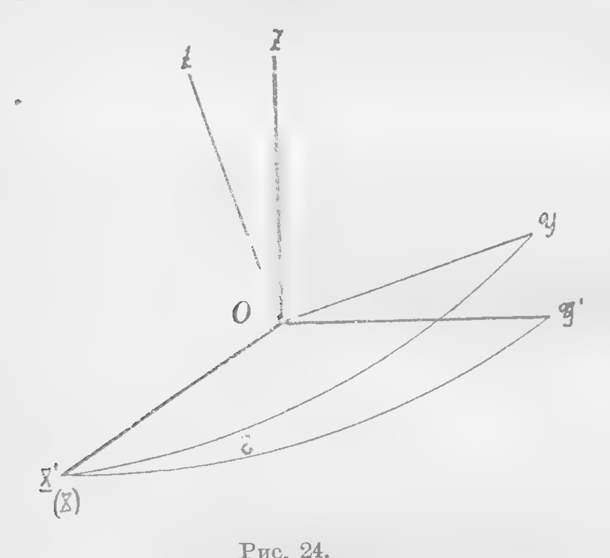


Рис. 24.

$$x' = x,$$

$$y' = y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon.$$

$$z' = y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon.$$

Подставляя вмѣсто x, y, z ихъ выраженія (108), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\,[\cos(v+\omega)\cos\Omega - \sin(v+\omega)\sin\Omega\cos i] \\ y' &= r\,[\cos(v+\omega)\sin\Omega\cos\varepsilon + \\ &\quad + \sin(v+\omega)\{\cos\Omega\cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon\}] \\ z' &= r\,[\cos(v+\omega)\sin\Omega\sin\varepsilon + \\ &\quad + \sin(v+\omega)\{\cos\Omega\cos i\sin\varepsilon + \sin i\cos\varepsilon\}]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (111)$$

Для упрощенія этихъ формулъ введемъ слѣдующія вспомогательныя величины:

$$\left.\begin{aligned} \sin a'\sin A' &= \cos\Omega \\ \sin a'\cos A' &= -\sin\Omega\cos i \\ \sin b'\sin B' &= \sin\Omega\cos\varepsilon \\ \sin b'\cos B' &= \cos\Omega\cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon \\ \sin c'\sin C' &= \sin\Omega\sin\varepsilon \\ \sin c'\cos C' &= \cos\Omega\cos i\sin\varepsilon + \sin i\cos\varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (112)$$

Если мы опять условимся брать всегда

$$\sin a' > 0, \qquad \sin b' > 0, \qquad \sin c' > 0,$$

то углы A', B', C' опредѣлятся по формуламъ (112) безъ всякой двойственности. Подставляя выраженія (112) въ уравненія (111), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\sin a'\sin(A'+v+\omega) \\ y' &= r\sin b'\sin(B'+v+\omega) \\ z' &= r\sin c'\sin(C'+v+\omega). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (113)$$

Эти формулы опредѣляютъ *прямолинейныя прямоугольныя геліоцентрическія экваторіальныя координаты* небеснаго тѣла. Постоянныя A', B', C, a', b', c' называются *экваторіальными Гауссовыми постоянными.*

Выведемъ формулу, которая можетъ служить для контроля вычисленія экваторіальныхъ Гауссовыхъ постоянныхъ. Для этого составимъ слѣдующее выраженіе

$$\frac{\sin b'\sin B'\sin c'\cos C' - \sin c'\sin C'\sin b'\cos B'}{\sin a'\cos A'}.$$

Тогда получимъ слѣдующую контрольную формулу:

$$\frac{\sin b'\sin c'\sin(B'-C')}{\sin a'\cos A'} = -\,tg\,i.$$

До сихъ поръ мы имѣли дѣло съ координатами геліоцентрическими, но такъ какъ наблюденія небесныхъ тѣлъ производятся не съ солнца, а съ земли, то намъ надо имѣть геоцентрическія координаты, т. е. координаты, отнесенныя къ такой системѣ, въ которой начало совпадаетъ съ центромъ земли. Назовемъ буквами ξ', η', ζ' *прямолинейныя прямоугольныя геоцентрическія экваторіальныя координаты* небеснаго тѣла. Далѣе, пусть будутъ X', Y', Z' геоцентрическія экваторіальныя координаты солнца. Координаты X'. Y', Z' даются между прочимъ въ астрономическомъ ежегодникѣ «Berliner Astronomisches Jahrbuch»; онѣ извѣстны изъ теоріи движенія земли вокругъ солнца.

Легко убѣдиться, что должны существовать такія соотношенія:

$$\xi' = x' + X'$$
$$\eta' = y' + Y'$$
$$\zeta' = z' + Z'.$$

Переходя отъ прямоугольныхъ координатъ ξ', η', ζ' къ полярнымъ ρ, α, δ, мы можемъ написать:

$$\xi' = \rho \cos \alpha \cos \delta$$
$$\eta' = \rho \sin \alpha \cos \delta$$
$$\zeta' = \rho \sin \delta.$$

Здѣсь ρ есть разстояніе небеснаго тѣла отъ центра земли, α — его прямое восхожденіе, δ — склоненіе.

Сравнивая между собою двѣ послѣднія системы формулъ, получаемъ:

$$\rho \cos \alpha \cos \delta = x' + X'$$
$$\rho \sin \alpha \cos \delta = y' + Y'$$
$$\rho \sin \delta = z' + Z'.$$

Чтобы опредѣлить прямое восхожденіе, дѣлимъ вторую формулу на первую. Тогда получимъ:

$$tg\, \alpha = \frac{y' + Y'}{x' + X'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (114)$$

Такъ какъ ρ есть величина существенно положительная и такъ какъ $\cos \delta$, какъ косинусъ угла, измѣняющагося въ предѣлахъ отъ -90° до $+90^\circ$, тоже всегда > 0, то при опредѣленіи четверти, въ которой лежитъ α, надо имѣть въ виду, что $\sin \alpha$ того же знака, какъ $y' + Y'$, и $\cos \alpha$ того же знака, какъ $x' + X'$.

Когда α опредѣлено, то склоненіе δ вычислится по одной изъ слѣдующихъ формулъ:

$$tg\,\delta = \frac{z' + Z'}{y' + Y'} \sin\alpha$$

или

$$tg\,\delta = \frac{z' + Z'}{x' + X'} \cos\alpha. \qquad \ldots\ldots\ldots (115)$$

Кромѣ α и δ намъ надо знать еще ρ. Разстояніе ρ входитъ въ формулы, служащія для опредѣленія параллакса по прямому восхожденію и склоненію или, иначе говоря, служащія для приведенія наблюденій, которыя всегда производятся гдѣ-нибудь на поверхности земли, къ центру земли. Разстояніе ρ можетъ быть вычислено по одной изъ слѣдующихъ формулъ:

$$\rho = \frac{z' + Z'}{\sin\delta}$$

или

$$\rho = \frac{x' + X'}{\cos\alpha\cos\delta} \qquad \ldots\ldots\ldots (116)$$

или

$$\rho = \frac{y' + Y'}{\sin\alpha\cos\delta}.$$

Разстояніе небеснаго тѣла отъ земли необходимо еще знать и для того, чтобы можно было освободить наблюденія отъ аберраціи. Въ виду того, что свѣтъ распространяется не мгновенно, положеніе небеснаго тѣла, наблюдаемое въ моментъ t, на самомъ дѣлѣ соотвѣтствуетъ нѣкоторому другому моменту $t - \Delta t$, гдѣ Δt есть такъ называемое *аберраціонное время*, которое вычисляется по формулѣ:

$$\Delta t = 498^s.5 \times \rho \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (117)$$

Здѣсь $498^s.5$ есть промежутокъ времени, въ теченіе котораго свѣтъ пробѣгаетъ астрономическую единицу разстоянія.

Совокупность формулъ (112), (113), (114), (115), (116) и (117) и служитъ для вычисленія эфемериды небеснаго тѣла, движущагося по эллиптической орбитѣ.

§ 33. Вычисленіе эфемериды небеснаго тѣла, совершающаго движеніе по параболической орбитѣ.

Положимъ теперь, что эфемериду надо вычислить для небеснаго тѣла, совершающаго движеніе по параболической орбитѣ. Мы знаемъ, что движеніе по параболической орбитѣ опредѣляется пятью элементами, а

именно: i, Ω, ω, q и T. Прежде всего для даннаго момента t опредѣляемъ истинную аномалію v по уравненію:

$$tg\,\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\,tg^3\,\frac{v}{2} = \frac{k\,(t - T)}{q^{3/2}\sqrt{2}}.$$

Зная v, мы легко могли бы опредѣлить радіусъ-векторъ r по уравненію:

$$r = \frac{q}{cos^2\frac{1}{2}\,v}\;.$$

Но для случая параболической орбиты можно обойтись и безъ опредѣленія r. Въ самомъ дѣлѣ, подставляя вмѣсто r только что написанное его выраженіе въ уравненія (113), которыя, какъ нетрудно убѣдиться, имѣютъ мѣсто также и для движенія небеснаго тѣла по параболѣ, находимъ:

$$x' = q\,sin\,a'\,sin\,(A' + v + \omega)\,sec^2\,\frac{v}{2},$$

$$y' = q\,sin\,b'\,sin\,(B' + v + \omega)\,sec^2\,\frac{v}{2},$$

$$z' = q\,sin\,c'\,sin\,(C' + v + \omega)\,sec^2\,\frac{v}{2}.$$

Въ этихъ уравненіяхъ мы можемъ ввести еще слѣдующія обозначенія:

$$q\,sin\,a' = q_a, \qquad q\,sin\,b' = q_b, \qquad q\,sin\,c' = q_c.$$

Тогда для опредѣленія прямолинейныхъ прямоугольныхъ геліоцентрическихъ экваторіальныхъ координатъ будемъ имѣть окончательно такія формулы:

$$x' = q_a\,sin\,(A' + v + \omega)\,sec^2\,\frac{v}{2},$$

$$y' = q_b\,sin\,(B' + v + \omega)\,sec^2\,\frac{v}{2},$$

$$z' = q_c\,sin\,(C' + v + \omega)\,sec^2\,\frac{v}{2}.$$

Послѣ этого α, δ, ρ и Δt опредѣляются по совершенно такимъ же формуламъ, какъ и въ случаѣ эллиптической орбиты.

§ 34. Вычисленіе эфемериды небеснаго тѣла, совершающаго движеніе по гиперболической орбитѣ.

Если надо вычислить эфемериду небеснаго тѣла, двигающагося по гиперболической орбитѣ, которая опредѣляется шестью элементами i, Ω,

ω, a, e и T, то прежде всего для даннаго момента t опредѣляемъ уголъ F по уравненію:

$$\lambda e\, tg\, F - log\, tg\left(45^\circ + \frac{1}{2} F\right) = M,$$

гдѣ

$$M = \frac{\lambda k\,(t - T)}{a^{3/2}}.$$

Затѣмъ r и v вычисляемъ по формуламъ:

$$r = a\left(\frac{e}{\cos F} - 1\right).$$

$$tg\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\; tg\,\frac{F}{2}.$$

Послѣ этого вычисленіе прямоугольныхъ координатъ, а также вычисленіе α, δ, ρ и Δt производится совершенно такимъ же образомъ, какъ и въ случаѣ эллиптической орбиты.

§ 35. Геометрическое значеніе эклиптикальныхъ и экваторіальныхъ Гауссовыхъ постоянныхъ.

Эклиптикальныя и экваторіальныя Гауссовы постоянныя, опредѣляемыя формулами (109) и (112), допускаютъ геометрическое толкованіе. Чтобы выяснить ихъ геометрическое значеніе, докажемъ, что по отношенію ко всякой системѣ прямолинейныхъ прямоугольныхъ осей координаты x, y, z небеснаго тѣла имѣютъ видъ:

$$x = r \sin a \sin(A + v + \omega)$$
$$y = r \sin b \sin(B + v + \omega)$$
$$z = r \sin c \sin(C + v + \omega).$$

Для этого составимъ прежде всего выраженіе косинуса угла, образуемаго радіусомъ-векторомъ OM небеснаго тѣла съ произвольнымъ направленіемъ OR (рис. 25). Положимъ, что $NMKO$ есть плоскость орбиты тѣла M. Точка O совпадаетъ съ центромъ солнца. Изъ точки O, какъ изъ центра, опишемъ сферу радіусомъ, равнымъ единицѣ. Пусть на поверхности этой сферы ☊ изображаетъ точку восходящаго узла плоскости орбиты по отношенію къ плоскости эклиптики. Пусть далѣе OR_1 есть проекція направленія OR на плоскость орбиты OP есть перпендикуляръ къ плоскости орбиты, ON линія, лежащая въ плоскости орбиты и перпендикулярная къ линіи узловъ O☊, такъ что $\angle NO$☊ или измѣряющая его дуга ☊N равна 90°.

Обозначимъ уголъ ROP, составляемый направленіемъ OR съ перпендикуляромъ OP къ плоскости орбиты, буквой ψ. Назовемъ еще буквой Ψ двугранный уголъ, образуемый двумя плоскостями, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ перпендикуляръ OP къ плоскости орбиты и черезъ данное направленіе OR, а другая— черезъ тотъ же перпендикуляръ и черезъ линію ON, лежащую въ плоскости орбиты и перпендикулярную къ линіи узловъ. Этотъ двугранный уголъ измѣряется дугой R_1N. Затѣмъ разсмотримъ сферическій треугольникъ RR_1M. Въ немъ сторона RM измѣряется угломъ ROM, косинусъ котораго мы желаемъ опредѣлить, сторона $RR_1 = 90° - \psi$, $\angle RR_1M = 90°$. Остается опредѣлить сторону R_1M. Она равна

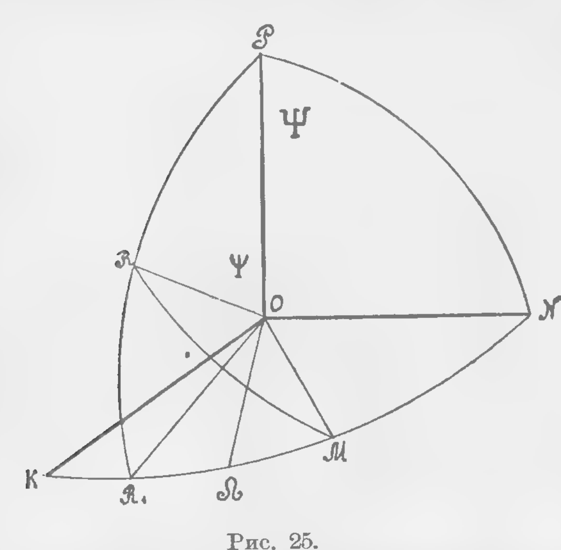


Рис. 25.

$$R_1M = R_1N - MN = \Psi - (\Omega N - \Omega M) = \Psi - (90° - v - \omega).$$

Итакъ въ прямоугольномъ треугольникѣ $RR_1\Psi$ имѣемъ:

$$R_1M = \Psi - 90° + v + \omega \qquad \text{и} \qquad RR_1 = 90° - \psi.$$

Примѣняя къ этому треугольнику основную формулу сферической тригонометріи, получаемъ:

$$\cos \angle MOR = \sin \psi \sin (\Psi + v + \omega) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (118)$$

Далѣе извѣстно, что по отношенію къ любой системѣ прямолинейныхъ прямоугольныхъ осей координаты x, y, z небеснаго тѣла M выражаются формулами:

$$x = r \cos \angle MOX, \qquad y = r \cos \angle MOY, \qquad z = r \cos \angle MOZ.$$

Если здѣсь вмѣсто

$$\cos \angle MOX, \qquad \cos \angle MOY \qquad \text{и} \qquad \cos \angle MOZ$$

мы подставимъ ихъ выраженія по формулѣ (118), причемъ для тѣхъ частныхъ случаевъ, когда направленіе OR замѣняется направленіями

OX, OY и OZ углы ϕ и Ψ обозначимъ буквами a и A, b и B, c и C, то окончательно для x, y и z получимъ формулы:

$$x = r \sin a \sin (A + v + \omega)$$
$$y = r \sin b \sin (B + v + \omega)$$
$$z = r \sin c \sin (C + v + \omega).$$

Здѣсь a, b, c суть углы, составляемые перпендикуляромъ OP къ плоскости орбиты съ осями координатъ OX, OY, OZ.

Что же касается A, B, C, то это суть двугранные углы, составляемые плоскостями POX, POY, POZ съ одной стороны и плоскостью PON съ другой.

Таково геометрическое значеніе Гауссовыхъ постоянныхъ. Теперь уже ясно, что углы a, b, c всегда достаточно считать заключающимися въ предѣлахъ отъ 0° до 180°. Слѣдовательно, всегда должно быть

$$\sin a > 0, \qquad \sin b > 0 \qquad \text{и} \qquad \sin c > 0.$$

§ 36. Геометрическій выводъ формулъ, служащихъ для опредѣленія эклиптикальныхъ и экваторіальныхъ Гауссовыхъ постоянныхъ.

Пользуясь указаннымъ въ предыдущемъ параграфѣ геометрическимъ значеніемъ Гауссовыхъ постоянныхъ, выведемъ геометрическимъ путемъ формулы, служащія для ихъ вычисленія.

Обратимся сначала къ эклиптикальнымъ постояннымъ. Пусть на рисункѣ 26 будетъ: XOY—плоскость эклиптики, $NO☊$—плоскость орбиты, OX—линія равноденствій, $O☊$—линія узловъ, OP—перпендикуляръ къ плоскости орбиты. Если изъ начала координатъ O, совпадающаго съ центромъ солнца, опишемъ сферу радіусомъ, равнымъ единицѣ, то будемъ имѣть:

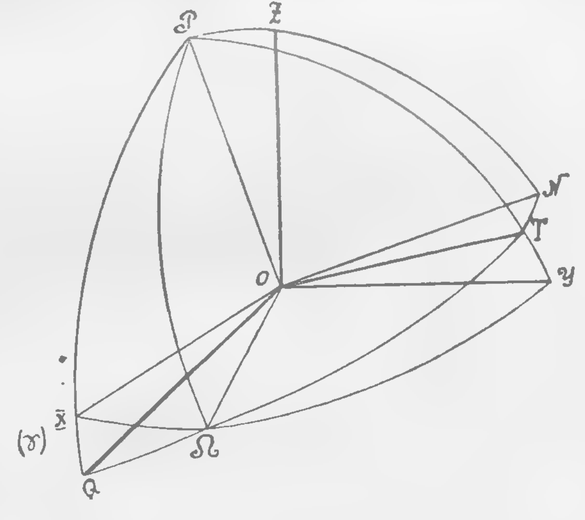


Рис. 26.

$$a = \angle POX = \smile PX. \qquad A = \angle QON = \smile QN.$$

Для опредѣленія постоянныхъ a и A разсмотримъ сферическій треугольникъ $XQ☊$, въ которомъ

$$X☊ = ☊,\ XQ = 90^\circ - a,\ Q☊ = A - 90^\circ,\ \angle XQ☊ = 90^\circ,$$
$$\angle X☊Q = i.$$

Изъ этого треугольника имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos ☊ \\ \sin a \cos A &= -\sin ☊ \cos i \\ \cos a &= \sin ☊ \sin i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (119)$$

Далѣе имѣемъ:

$$b = \angle POY = \smile PY, \qquad B = \angle TON = \smile TN.$$

Для опредѣленія этихъ постоянныхъ b и B разсмотримъ сферическій треугольникъ $☊TY$, въ которомъ

$$☊Y = 90^\circ - ☊,\ TY = b - 90^\circ,\ ☊T = 90^\circ - B,\ \angle ☊TY = 90^\circ,$$
$$\angle T☊Y = i.$$

Изъ этого треугольника получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin b \sin B &= \sin ☊ \\ \sin b \cos B &= \cos ☊ \cos i \\ \cos b &= -\cos ☊ \sin i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (120)$$

Наконецъ

$$c = \angle POZ = \smile PZ = i \qquad \text{и} \qquad C = 0^\circ,$$

такъ какъ линія OZ вслѣдствіе ея перпендикулярности къ линіи $O☊$ должна лежать въ плоскости PON, перпендикулярной къ линіи $O☊$.

Формулами (119) и (120) безъ всякой двойственности опредѣляются эклиптикальныя постоянныя.

Теперь обратимся къ опредѣленію экваторіальныхъ постоянныхъ. Для этой цѣли воспользуемся рис. 27-мъ, на которомъ $X'OY'$ есть плоскость экватора, $X'OQ$—плоскость эклиптики, $☊ON$—плоскость орбиты, OP—перпендикуляръ къ плоскости орбиты, OX'—линія равноденствій, $O☊$—линія узловъ.

Для опредѣленія постоянныхъ a' и A' разсмотримъ сферическій треугольникъ $P☊X'$, въ которомъ

$$PX' = a',\ P☊ = 90^\circ,\ X'☊ = ☊,\ \angle X'P☊ = A' - 90^\circ,$$
$$\angle P☊X' = 90^\circ - i.$$

Изъ этого треугольника имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin a' \sin A' &= \cos \Omega \\ \sin a' \cos A' &= -\sin \Omega \cos i \\ \cos a' &= \sin \Omega \sin i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (121)$$

Эти формулы тождественны съ формулами (119). Этого и слѣдовало ожидать, такъ какъ мы выше видѣли, что постоянныя a, A и a', A' опредѣляются однѣми и тѣми же формулами (§ 32).

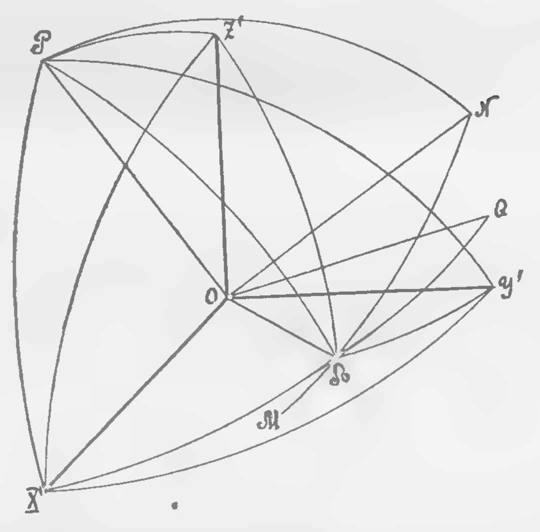


Рис. 27.

Для опредѣленія постоянныхъ b' и B' обратимся къ сферическому треугольнику $P\Omega Y'$, въ которомъ

$$PY' = b', \quad P\Omega = 90° \quad \text{и} \quad \angle \Omega PY' = 90° - B'.$$

Изъ этого треугольника имѣемъ:

$$\begin{aligned} \sin b' \sin B' &= \cos \Omega Y' \\ \sin b' \cos B' &= \sin \Omega Y' \sin \angle P\Omega Y' \\ \cos b' &= \sin \Omega Y' \cos \angle P\Omega Y'. \end{aligned}$$

Теперь разсмотримъ вспомогательный треугольникъ $X'\Omega Y'$, въ которомъ

$$X'Y' = 90°, \qquad \angle \Omega X'Y' = \varepsilon,$$

$$\angle X'\Omega Y' = \angle X'\Omega M + 270° - \angle P\Omega Y' = i + 270° - \angle P\Omega Y'.$$

Напомнимъ, что ε есть наклонность экватора къ эклиптикѣ.

Изъ этого треугольника получаемъ:

$$\begin{aligned} \sin \Omega Y' \cos (i - \angle P\Omega Y') &= -\sin \varepsilon \\ \sin \Omega Y' \sin (i - \angle P\Omega Y') &= -\cos \Omega \cos \varepsilon \\ \cos \Omega Y' &= \sin \Omega \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда имѣемъ:

$$\sin \Omega Y' \cos \angle P\Omega Y' \cos i + \sin \Omega Y' \sin \angle P\Omega Y' \sin i = -\sin \varepsilon$$

$$\sin \Omega Y' \cos \angle P\Omega Y' \sin i - \sin \Omega Y' \sin \angle P\Omega Y' \cos i = -\cos \Omega \cos \varepsilon$$

$$\cos \Omega Y' = \sin \Omega \cos \varepsilon.$$

Черезъ рѣшеніе этихъ уравненій получаемъ:

$$\sin \Omega Y' \cos \angle P\Omega Y' = -\sin \varepsilon \cos i - \cos \Omega \cos \varepsilon \sin i$$
$$\sin \Omega Y' \sin \angle P\Omega Y' = -\sin \varepsilon \sin i + \cos \Omega \cos \varepsilon \cos i$$
$$\cos \quad Y' = \sin \Omega \cos \varepsilon.$$

Поэтому окончательно будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \sin b' \sin B' &= \sin \Omega \cos \varepsilon \\ \sin b' \cos B' &= -\sin \varepsilon \sin i + \cos \Omega \cos \varepsilon \cos i \\ \cos b' &= -\sin \varepsilon \cos i - \cos \Omega \cos \varepsilon \sin i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (122)$$

Теперь остается опредѣлить постоянныя c' и C'. Для этого разсмотримъ сферическій треугольникъ $PZ'\Omega$, въ которомъ

$$PZ' = c', \qquad P\Omega = 90^\circ \qquad \text{и} \qquad \angle \Omega PZ' = 90^\circ - C'.$$

Изъ этого треугольника имѣемъ:

$$\sin c' \sin C' = \cos Z'\Omega$$
$$\sin c' \cos C' = \sin Z'\Omega \sin \angle P\Omega Z'$$
$$\cos c' = \sin Z'\Omega \cos \angle P\Omega Z'.$$

Далѣе разсмотримъ вспомогательный треугольникъ $Z'X'\Omega$, въ которомъ

$$Z'X' = 90^\circ, \qquad \angle Z'X'\Omega = 90^\circ - \varepsilon,$$

$$\angle Z'\Omega X' = \angle M\Omega P - \angle X'\Omega M + \angle P\Omega Z' = 90^\circ - i + \angle P\Omega Z'.$$

Этотъ треугольникъ даетъ:

$$\sin Z'\Omega \cos (i - \angle P\Omega Z') = \cos \varepsilon$$
$$\sin Z'\Omega \sin (i - \angle P\Omega Z') = -\cos \Omega \sin \varepsilon$$
$$\cos Z'\Omega = \sin \Omega \sin \varepsilon.$$

Отсюда находимъ:

$$\sin Z'\Omega \cos \angle P\Omega Z' \cos i + \sin Z'\Omega \sin \angle P\Omega Z' \sin i = \cos \varepsilon,$$
$$\sin Z'\Omega \cos \angle P\Omega Z' \sin i - \sin Z'\Omega \sin \angle P\Omega Z' \cos i = -\cos \Omega \sin \varepsilon,$$
$$\cos Z'\Omega = \sin \Omega \sin \varepsilon.$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ:

$$\sin Z'\Omega \cos \angle P\Omega Z' = \cos i \cos \varepsilon - \cos \Omega \sin \varepsilon \sin i,$$
$$\sin Z'\Omega \sin \angle P\Omega Z' = \sin i \cos \varepsilon + \cos \Omega \sin \varepsilon \cos i,$$
$$\cos Z'\Omega = \sin \Omega \sin \varepsilon.$$

Поэтому окончательно получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin c' \sin C' &= \sin \Omega \sin \varepsilon \\ \sin c' \cos C' &= \sin i \cos \varepsilon + \cos \Omega \sin \varepsilon \cos i \\ \cos c' &= \cos i \cos \varepsilon - \cos \Omega \sin \varepsilon \sin i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (123)$$

Формулами (121), (122) и (123) безъ всякой двойственности опредѣляются экваторіальныя постоянныя.

Формулы (122) и (123) введеніемъ вспомогательныхъ величинъ можно привести къ логариѳмическому виду.

§ 37. Опредѣленіе времени оппозиціи малыхъ планетъ.

Необходимо различать оппозицію какого-нибудь свѣтила съ солнцемъ по долготѣ и по прямому восхожденію. Оппозиціей или противостояніемъ свѣтила съ солнцемъ по долготѣ называется такое положеніе свѣтила, при которомъ его геоцентрическая долгота отличается отъ геоцентрической долготы солнца на 180°. Подобнымъ же образомъ оппозиціей или противостояніемъ свѣтила съ солнцемъ по прямому восхожденію называется такое положеніе свѣтила, при которомъ его геоцентрическое прямое восхожденіе отличается отъ геоцентрическаго прямого восхожденія солнца на 12^h. Умѣть вычислять время оппозиціи малыхъ планетъ съ солнцемъ необходимо потому, что малыя планеты обыкновенно наблюдаются около этого времени, и при вычисленіи эфемериды стараются расположить эту послѣднюю приблизительно симметрично относительно времени оппозиціи планеты.

Займемся сначала опредѣленіемъ времени оппозиціи какой-нибудь малой планеты съ солнцемъ по долготѣ.

Приближенно указать время, когда планета будетъ въ противостояніи съ солнцемъ, не представляетъ никакого труда: для этого можно воспользоваться самымъ грубымъ графическимъ построеніемъ. Для болѣе точнаго вычисленія момента оппозиціи поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Нетрудно понять, что въ моментъ оппозиціи геоцентрическая долгота планеты равняется ея геліоцентрической долготѣ.

Въ § 24 была выведена формула

$$tg\,(l - \Omega) = tg\,(L - \Omega) \cos i,$$

гдѣ l есть геліоцентрическая долгота небеснаго тѣла, L—его долгота въ орбитѣ. Тамъ же мы видѣли, что

$$L - \Omega = v + \omega$$

есть угловое разстояніе небеснаго тѣла отъ восходящаго узла его орбиты. Это угловое разстояніе называется *аргументомъ широты.*

Обозначая аргументъ широты буквой u, получаемъ

$$tg\,(l - \Omega) = tg\,u\,cos\,i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (124)$$

Къ этой формулѣ надо присоединить еще слѣдующія:

$$u = v + \omega$$

$$tg\,\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\,\frac{1}{2}E.$$

$$E - e\,sin\,E = n\,(t - T),$$

$$n = \frac{k}{a^{3/2}}.$$

По формулѣ (124) безъ всякой двойственности опредѣляется l, такъ какъ $cos\,(l - \Omega)$ долженъ быть того же знака, какъ $cos\,u$.

Вычислимъ же геліоцентрическую долготу l по формулѣ (124) для нѣсколькихъ моментовъ, отдѣленныхъ другъ отъ друга, напр., десятидневными промежутками, съ такимъ расчетомъ, чтобы моментъ оппозиціи пришелся гдѣ-нибудь между крайними моментами. Для тѣхъ же моментовъ возьмемъ изъ астрономическаго ежегодника «Berliner Astronomisches Jahrbuch» геоцентрическія долготы солнца.

Положимъ теперь, что для нѣкоторыхъ моментовъ t и t' геліоцентрическія долготы планеты оказались равными l и l', а геоцентрическія долготы солнца равны $L_\odot$ и $L'_\odot$, и положимъ, что по виду этихъ величинъ мы можемъ заключить, что нѣкоторая величина l_0, промежуточная между l и l', отличается на 180° отъ величины $(L_\odot)_0$, промежуточной между $L_\odot$ и $L'_\odot$. Тогда очевидно, что моментъ T_0, которому соотвѣтствуютъ значенія l_0 и $(L_\odot)_0$ и который лежитъ между моментами t и t', и есть моментъ оппозиціи. Посмотримъ, какимъ образомъ можетъ быть опредѣленъ этотъ моментъ T_0. Допуская, что долготы планеты l и l' и долготы солнца $L_\odot$ и $L'_\odot$ измѣняются пропорціонально времени, мы, очевидно, можемъ написать такія соотношенія:

$$l_0 = l + \frac{l' - l}{t' - t}\,(T_0 - t),$$

$$(L_\odot)_0 = L_\odot + \frac{L'_\odot - L_\odot}{t' - t}\,(T_0 - t).$$

Но такъ какъ по условію должно быть $l_0 = 180° + (L_\odot)_0$, то для опредѣленія T_0 получаемъ такое уравненіе:

$$l + \frac{l' - l}{t' - t}\,(T_0 - t) = 180° + L_\odot + \frac{L'_\odot - L_\odot}{t' - t}\,(T_0 - t).$$

Отсюда находимъ:

$$T_0 = t + \frac{l - (180^\circ + L_\odot)}{L'_\odot - L_\odot - (l' - l)} (t' - t).$$

Формула эта даетъ T_0 съ точностью вполнѣ достаточною для практическихъ цѣлей. По этой формулѣ вычисляется моментъ противостоянія по долготѣ.

Замѣняя въ этой формулѣ долготы прямыми восхожденіями, получимъ формулу для вычисленія противостоянія по прямому восхожденію, а именно:

$$T_0 = t + \frac{\alpha - (12^h + A)}{A' - A - (\alpha' - \alpha)} (t' - t),$$

гдѣ α' и α суть прямыя восхожденія планеты, а A' и A—прямыя восхожденія солнца. При этомъ предполагается, что прямыя восхожденія выражены во времени. Замѣтимъ, что α' и α вычисляются по формуламъ § 32, а A' и A берутся изъ астрономическаго ежегодника «Berliner Astronomisches Jahrbuch».

§ 38. Вычисленіе яркости малыхъ планетъ во время оппозиціи.

При вычисленіи эфемериды малой планеты весьма полезно опредѣлить также, какою яркостью она будетъ обладать во время оппозиціи. Такъ какъ малыя планеты посылаютъ намъ не собственный свѣтъ, а свѣтъ, отраженный отъ солнца, то, называя буквой J_0 яркость какой-нибудь малой планеты при ея разстояніи r_0 отъ солнца и при ея разстояніи ρ_0 отъ земли, мы можемъ, основываясь на законахъ физики, выразить ея яркость J при какихъ угодно разстояніяхъ r и ρ формулой:

$$J = J_0 \frac{r_0^2 \rho_0^2}{r^2 \rho^2}.$$

Для малыхъ планетъ за единицу яркости принимается яркость $J_0 = 1$ при $r_0 = a$ и при $\rho_0 = a - 1$, гдѣ a есть большая полуось орбиты разсматриваемой планеты.

На основаніи только что сдѣланнаго замѣчанія, мы предыдущую формулу перепишемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$J = \frac{a^2 (a - 1)^2}{r^2 \rho^2}.$$

Логариѳмируя эту формулу, получаемъ:

$$\log J = 2 \log (a^2 - a) - 2 \log (r\rho).$$

Выразимъ яркость J въ звѣздныхъ величинахъ. Для этого воспользуемся тѣмъ обстоятельствомъ, что отношеніе яркостей звѣздъ двухъ сосѣднихъ по блеску классовъ, какъ показываютъ наблюденія, есть величина постоянная, какіе бы два рядомъ стоящіе класса мы ни взяли.

Если мы обозначимъ буквой J_1 яркость звѣздъ первой величины, буквой J_2 яркость звѣздъ второй величины, буквой J_3—яркость звѣздъ третьей величины и т. д., то этотъ выводъ изъ наблюденій математически мы представимъ такъ:

$$\frac{J_1}{J_2} = h, \ \frac{J_2}{J_3} = h, \ \frac{J_3}{J_4} = h, \ldots, \ \frac{J_{p-1}}{J_p} = h,$$

гдѣ h и есть постоянная величина вышеупомянутаго отношенія. Изъ многихъ опредѣленій въ среднемъ найдено:

$$\log h = 0{,}40.$$

Далѣе очевидно, что если мы будемъ составлять отношенія яркости звѣздъ первой величины къ яркости звѣздъ второй, третьей и т. д. величинъ, то мы получимъ такія соотношенія:

$$\frac{J_1}{J_2} = h, \ \frac{J_1}{J_3} = h^2, \ \frac{J_1}{J_4} = h^3, \ldots, \ \frac{J_1}{J_p} = h^{p-1}.$$

На этомъ основаніи для отношенія яркости звѣздъ первой величины съ одной стороны къ яркости звѣздъ p-ой величины, съ другой—къ яркости звѣздъ q-ой величины будемъ имѣть формулы:

$$\frac{J_1}{J_p} = h^{p-1}, \ \frac{J_1}{J_q} = h^{q-1}.$$

Дѣля вторую изъ этихъ формулъ на первую, находимъ:

$$\frac{J_p}{J_q} = \frac{h^{q-1}}{h^{p-1}}.$$

Окончательно отношеніе яркости звѣздъ p-ой величины къ яркости звѣздъ q-ой величины можемъ представить въ видѣ:

$$\frac{J_p}{J_q} = h^{q-p} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (125)$$

Назовемъ теперь буквой m_0 звѣздную величину малой планеты, соотвѣтствующую ея яркости J_0, принятой нами за единицу. Иначе говоря, m_0 есть звѣздная величина планеты при ея разстояніи $r_0 = a$ отъ солнца и при ея разстояніи $\rho_0 = a - 1$ отъ земли. Эту величину m_0 называютъ средней звѣздной величиной планеты во время ея оппозиціи.

Назовемъ, далѣе, буквой M звѣздную величину планеты при ея разстоянiи r отъ солнца и при ея разстоянiи ρ отъ земли. Значитъ, звѣздной величинѣ M планеты соотвѣтствуетъ яркость J. На основанiи формулы (125) мы, очевидно, можемъ написать:

$$\frac{J}{J_0} = h^{m_0 - M}.$$

Или, такъ какъ $J_0 = 1$, то имѣемъ: $J = h^{m_0 - M}$

Логариѳмируя, получаемъ:

$$\log J = (m_0 - M) \log h.$$

Отсюда опредѣляемъ M:

$$M = m_0 - \frac{\log J}{\log h} = m_0 - \frac{\log J}{0{,}40} = m_0 - 2{,}5 \log J.$$

Но выше мы имѣли, что

$$\log J = 2 \log (a^2 - a) - 2 \log (r\rho).$$

Поэтому получаемъ:

$$M = m_0 - 5 \log (a^2 - a) + 5 \log (r\rho).$$

Количество

$$m_0 - 5 \log (a^2 - a)$$

есть постоянная величина для данной планеты. Назовемъ это количество буквой g, такъ что

$$g = m_0 - 5 \log (a^2 - a) \quad \ldots \ldots \quad (126)$$

Тогда

$$M = g + 5 \log (r\rho) \quad \ldots \ldots \quad (127)$$

Такимъ образомъ, если постоянная g извѣстна, то по формулѣ (127) мы можемъ вычислить видимую звѣздную величину M малой планеты для времени оппозицiи, если вмѣсто r и ρ подставимъ соотвѣтственныя величины. Что касается постоянныхъ g и m_0, то онѣ, конечно, должны быть опредѣлены изъ наблюденiй. Наблюденiя намъ даютъ M для нѣкоторыхъ значенiй r и ρ. Тогда по формулѣ (127) опредѣляется g, а по формулѣ (126) вычисляется m_0. Величины g и m_0 даются для малыхъ планетъ въ ежегодникѣ «Berliner Astronomisches Jahrbuch».

§ 39. Приведенiе элементовъ ☊, i и ω отъ средняго равноденствiя и эклиптики одной эпохи къ среднему равноденствiю и эклиптикѣ другой эпохи.

При вычисленiи эфемериды нерѣдко бываетъ необходимо элементы, отнесенные къ среднему равноденствiю и эклиптикѣ одной эпохи t_0, отнести къ среднему равноденствiю и эклиптикѣ другой эпохи t_1.

Для этого нужно принять во вниманіе вліяніе измѣненія положенія точки весенняго равноденствія и эклиптики вслѣдствіе прецессіи на элементы ☊, i и ω орбиты небеснаго тѣла. Покажемъ же, какъ рѣшается эта задача. Положимъ, что элементы $☊_0$, i_0 и ω_0 отнесены къ среднему равноденствію и эклиптикѣ эпохи t_0, и требуется найти элементы $☊_1$, i_1 и ω_1, отнесенные къ среднему равноденствію и эклиптикѣ эпохи t_1. Обратимся для этого къ рисунку 28. На этомъ рисункѣ $\gamma_0 E N_0 T_0$ есть эклиптика

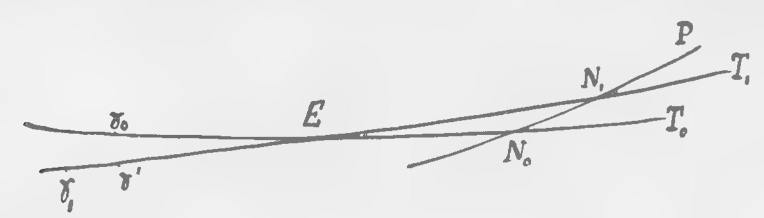


Рис. 28.

эпохи t_0, и γ_0 — средняя равноденственная точка этой эпохи. Далѣе $\gamma_1 E N_1 T_1$ есть эклиптика эпохи t_1 и γ_1—средняя равноденственная точка этой эпохи. Наконецъ $N_0 N_1 P$ есть орбита небеснаго тѣла, причемъ точка P представляетъ собою положеніе перигелія. Разсмотримъ сферическій треугольникъ EN_1N_0. Въ немъ

$$\angle EN_1N_0 = i_1, \quad \angle EN_0N_1 = 180^\circ - i_0, \quad \angle N_1EN_0 = \pi,$$

гдѣ π есть наклонность эклиптики $\gamma_1 T_1$ къ эклиптикѣ $\gamma_0 T_0$. Затѣмъ дугу $\gamma_0 E$ обозначимъ буквой M; это есть долгота восходящаго узла эклиптики $\gamma_1 T_1$ по отношенію къ эклиптикѣ $\gamma_0 T_0$. На эклиптикѣ $\gamma_1 T_1$ отложимъ отъ точки E дугу $E\gamma' = M$. Тогда дуга $\gamma_1\gamma' = l$ представитъ собою перемѣщеніе точки весенняго равноденствія вслѣдствіе прецессіи за промежутокъ времени $t_1 - t_0$. Въ разсматриваемомъ сферическомъ треугольникѣ EN_0N_1 стороны выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$EN_1 = ☊_1 - M - l, \quad EN_0 = ☊_0 - M, \quad N_0N_1 = N_0P - N_1P = \omega_0 - \omega_1.$$

Опредѣлимъ изъ треугольника EN_0N_1 косинусъ угла $\angle EN_1N_0$. Тогда будемъ имѣть:

$$\cos i_1 = \cos i_0 \cos \pi + \sin i_0 \sin \pi \cos (☊_0 - M).$$

По малости угла π принимаемъ:

$$\cos \pi = 1 \text{ и } \sin \pi = \pi \sin 1''.$$

Тогда получимъ:

$$\cos i_1 - \cos i_0 = \pi \sin 1'' \sin i_0 \cos (☊_0 - M),$$

или

$$2 \sin \frac{i_1 + i_0}{2} \sin \frac{i_0 - i_1}{2} = \pi \sin 1'' \sin i_0 \cos (☊_0 - M).$$

Съ достаточною степенью точности можемъ принять:

$$\sin\frac{i_1+i_0}{2}=\sin i_0$$

и

$$\sin\frac{i_0-i_1}{2}=\frac{1}{2}(i_0-i_1)\sin 1''.$$

Тогда для опредѣленія i_1 окончательно получимъ такую формулу:

$$i_1=i_0-\pi\cos(\Omega_0-M)\quad\ldots\ldots\ldots(128)$$

Теперь примѣнимъ къ треугольнику EN_0N_1 формулу синусовъ. Тогда получимъ:

$$\sin(\omega_0-\omega_1)=\sin\pi\frac{\sin(\Omega_0-M)}{\sin i_1}.$$

Полагая здѣсь: $\sin(\omega_0-\omega_1)=(\omega_0-\omega_1)\sin 1''$, $\sin\pi=\pi\sin 1''$ и $\sin i_1=\sin i_0$, получаемъ для опредѣленія ω_1 слѣдующую формулу:

$$\omega_1=\omega_0-\pi\frac{\sin(\Omega_0-M)}{\sin i_0}\quad\ldots\ldots\ldots(129)$$

Для опредѣленія Ω_1 примѣнимъ къ сторонѣ EN_1 формулу косинуса. Получаемъ:

$$\cos(\Omega_1-M-l)=\cos(\Omega_0-M)\cos(\omega_0-\omega_1)-$$
$$-\sin(\Omega_0-M)\sin(\omega_0-\omega_1)\cos i_0.$$

Полагая $\cos(\omega_0-\omega_1)=1$ и $\sin(\omega_0-\omega_1)=(\omega_0-\omega_1)\sin 1''$, будемъ имѣть:

$$\cos(\Omega_1-M-l)-\cos(\Omega_0-M)=(\omega_1-\omega_0)\sin 1''\sin(\Omega_0-M)\,.\cos i_0$$

Или

$$2\sin\left(\frac{\Omega_1+\Omega_0}{2}-M-\frac{l}{2}\right)\sin\left(\frac{\Omega_0-\Omega_1+l}{2}\right)=$$
$$=(\omega_1-\omega_0)\sin 1''\sin(\Omega_0-M)\cos i_0.$$

Здѣсь мы можемъ положить:

$$\sin\left(\frac{\Omega_1+\Omega_0}{2}-M-\frac{l}{2}\right)=\sin(\Omega_0-M),$$

$$\sin\left(\frac{\Omega_0-\Omega_1+l}{2}\right)=\frac{1}{2}(\Omega_0-\Omega_1+l)\sin 1''.$$

Тогда, пользуясь формулой (129), будемъ имѣть:

$$\Omega_0 - \Omega_1 + l = -\pi \, cotg \, i_0 \, sin \, (\Omega_0 - M).$$

Окончательно, получаемъ:

$$\Omega_1 = \Omega_0 + l + \pi \, cotg \, i_0 \, sin \, (\Omega_0 - M) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (130)$$

По формуламъ (128), (129) и (130) и вычисляется приведенiе элементовъ Ω, i и ω отъ средняго равноденствiя и эклиптики одной эпохи къ среднему равноденствiю и эклиптикѣ другой эпохи. Ниже мы приводимъ формулы, по которымъ могутъ быть вычислены въ каждомъ частномъ случаѣ величины l, π и M. Эти формулы выводятся въ небесной механикѣ:

$$l = [+ 50'',23465 + 0'',00022580 \, (t_0 - 1850)] \, (t_1 - t_0) + \\ + 0'',00011290 \, (t_1 - t_0)^2$$

$$\pi = + 0'',47950 \, (t_1 - t_0)$$

$$M = 172^\circ 56' 37'' + 32'',860 \, (t_0 - 1850) + \\ + 0'',000087 \, (t_0 - 1850)^2 - 8'',683 \, (t_1 - t_0).$$

Формулы (128), (129) и (130) даютъ результаты вполнѣ достаточной точности въ томъ случаѣ, когда промежутокъ времени $t_1 - t_0$ невеликъ, напр., равенъ 10 или 20 годамъ, что обыкновенно на практикѣ и бываетъ.

УПРАЖНЕНIЯ.

Задача № 15. Даны элементы:

$$\Omega = 137^\circ 27' 10'',02$$
$$i = 113^\circ 34' 12'',24$$
$$\omega = 152^\circ 45' 37'',82$$

и наклонность экватора къ эклиптикѣ

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 26'',12.$$

Вычислить экваторiальныя Гауссовы постоянныя и написать формулы для опредѣленiя прямолинейныхъ прямоугольныхъ экваторiальныхъ гелiоцентрическихъ координатъ.

Рѣшенiе. Для опредѣленiя координатъ служатъ формулы:

$$x' = r \, sin \, a' \, sin \, (A' + v + \omega)$$
$$y' = r \, sin \, b' \, sin \, (B' + v + \omega)$$
$$z' = r \, sin \, c' \, sin \, (C' + v + \omega).$$

Постоянныя a', A', b', B', c', C' опредѣляются по формуламъ:

$$\sin a' \sin A' = \cos \Omega$$
$$\sin a' \cos A' = -\sin \Omega \cos i$$
$$n \sin N = \sin i$$
$$n \cos N = \cos \Omega \cos i$$
$$\sin b' \sin B' = \sin \Omega \cos \varepsilon$$
$$\sin b' \cos B' = n \cos (N + \varepsilon)$$
$$\sin c' \sin C' = \sin \Omega \sin \varepsilon$$
$$\sin c' \cos C' = n \sin (N + \varepsilon),$$

которыя отличаются отъ формулъ, выведенныхъ въ § 36, только тѣмъ, что здѣсь введены еще вспомогательныя величины n и N.

Ниже приводятся самыя вычисленія.

$\cos \varepsilon$	9,9625385	$n \sin N$	9,9621664
$\sin \varepsilon$	9,5999538	$\sin N$	9,9786527
$\sin \Omega$	9,8300736	$n \cos N$	9,4692217
$\cos i$	$9,6019191_n$	N	72°10′56″,04
$\sin a' \sin A'$	$9,8673026_n$	$N + \varepsilon$	95°38′22″,16
$\sin A'$	$9,9725587_n$	$\cos (N + \varepsilon)$	$8,9924157_n$
$\sin a' \cos A'$	9,4319927	n	9,9835137
A'	290°9′14″,98	$\sin (N + \varepsilon)$	9,9978928
$\sin a'$	9,8947439		
$\sin b' \sin B'$	9,7926121	$\sin c' \sin C'$	9,4300274
$\sin B'$	9,9950068	$\cos C'$	9,9835034
$\sin b' \cos B'$	$8,9759294_n$	$\sin c' \cos C'$	9,9814065
B'	98°40′18″,24	C'	15°41′32″,74
$\sin b'$	9,7976053	$\sin c'$	9,9979031.

Такимъ образомъ можемъ написать:

$$x' = r\,[9,8947439] \sin (\ 82°54'52'',80 + v)$$
$$y' = r\,[9,7976053] \sin (251°25'56'',06 + v)$$
$$z' = r\,[9,9979031] \sin (168°27'10'',56 + v).$$

Контроль: $$tg\,i = -\frac{\sin b' \sin c' \sin (B' - C')}{\sin a' \cos A'}.$$

$B' =$	$98°40'18'',24$	$\sin a'$	9,8947439
$C' =$	$15\ 41\ 32\ ,74$	$\cos A'$	9,5372488
$B' - C' =$	$82\ 58\ 45\ ,50$	числит.	9,7922398
$\sin b'$	9,7976053	знамен.	9,4319927
$\sin c'$	9,9979031	$tg\,i$ (контр.)	$0,3602471_n$
$\sin (B' - C')$	9,9967314	$tg\,i$ (непоср.)	$0,3602474_n$.

Задача № 16. Даны слѣдующіе элементы Эвдоры (217):

$T_0 =$ 1880 Сент. 1,5 ср. Берл. врем.

$M_0 = 19°21'45'',9$

$\Omega = 164°\ 9'19'',1$ |
$\omega = 136°46'23'',9$ | средн. равн. 1880.0
$i = 11°19'46'',0$ |

$\varphi = 21°47'52'',4$

$\log a = 0,495481$

$$n = \frac{k''}{a^{3/2}} = 640'',893.$$

Требуется вычислить эфемериду планеты для 1880 года Сент. 1,5, Сент. 5,5 и Сент. 9,5.

Рѣшеніе. Прежде всего, подобно тому, какъ это было сдѣлано въ предыдущей задачѣ, находимъ:

$$x' = r\,[9,999374] \sin (v + 31°13'20'',1)$$
$$y' = r\,[9,989536] \sin (v + 301°54'21'',9)$$
$$z' = r\,[9,349147] \sin (v + 287°40'13'',1).$$

Опредѣливши E изъ уравненія Кеплера

$$E - \sin\varphi \sin E = M = M_0 + n\,(t - t_0),$$

мы воспользуемся далѣе слѣдующими формулами:

$$r \sin v = a \cos\varphi \sin E$$
$$r \cos v = a\,(\cos E - \sin\varphi)$$

$$\rho \cos\alpha \cos\delta = x' + X'$$

$$\rho \sin\alpha \cos\delta = y' + Y'$$

$$\rho \sin\delta = z' + Z'$$

$$\text{аберр. время} = 498^s,5\ \rho = [2,69767]\ \rho.$$

Найдя

$$\log \sin\varphi = 9,569764$$

$$\log \cos\varphi = 9,967782,$$

вычисляемъ эфемериду по нижеслѣдующей схемѣ, причемъ рѣшеніе задачи Кеплера нами опущено.

M	19°21′45″,9	20° 4′29″,5	20°47′13″,0
E	30° 0′ 3″,5	31° 2′52″,8	32° 5′22″,7
$\sin E$	9,698983	9,712444	9,725295
$\cos E$	9,937526	9,932847	9,927996
soustr.	0,124563	0,116339	0.107739
$\cos E - \sin\varphi$	9,694327	9,686103	9,677503
$r \sin v$	0,162246	0,175707	0,188558
	9,862828	9,852404	9,857132
$r \cos v$	0,189808	0,181584	0,172984
v	43°10′59″,3	44°36′44″,5	46° 1′37″,6
r	0,326980	0,329180	0,331426
$A' + v + \omega$	74°24′19″,4	75°50′ 4″,6	77°14′57″,7
$\sin(A' + v + \omega)$	9,983711	9,986590	9,989156
$r \sin a'$	0,326354	0,328554	0,330800
x'	+ 2,042043	+ 2,066067	+ 2,089086
X'	— 0,946556	— 0,966973	— 0,982889
$B' + v + \omega$	345° 5′21″,2	346°31′ 6″,4	347°55′59″,5
$\sin(B' + v + \omega)$	$9,410465_n$	$9,367603_n$	$9,320254_n$
$r \sin b'$	0,316516	0,318716	0,320962
y'	— 0,533311	— 0,485646	— 0,437740
Y'	+ 0,319212	+ 0,259443	+ 0,198472
$C' + v + \omega$	330°51′12″,4	332°16′57″,6	333°41′50″,7
$\sin(C' + v + \omega)$	$9,687569_n$	$9,667556_n$	$9,646513_n$
$r \sin c'$	9,676127	9,678327	9,680573

z'	$-0{,}231045$	$-0{,}221760$	$-0{,}212366$
Z'	$+0{,}138498$	$+0{,}112564$	$+0{,}086112$
$\rho \sin\alpha \cos\delta$	$9{,}330615_n$	$9{,}354499_n$	$9{,}378884_n$
	$9{,}991860$	$9{,}990992$	$9{,}990071$
$\rho \cos\alpha \cos\delta$	$0{,}039607$	$0{,}041035$	$0{,}043833$
$\rho \sin\delta$	$8{,}966362_n$	$9{,}038207_n$	$9{,}101245_n$
$\cos\delta$	$9{,}998512$	$9{,}997953$	$9{,}997315$
$\rho \cos\delta$	$0{,}047747$	$0{,}050043$	$0{,}053762$
α	$348°56'29'',9$	$348°22'13'',5$	$347°47'42'',4$
α	$23^h15^m45^s,99$	$23^h13^m28^s,90$	$23^h11^m10^s,83$
δ	$-4°44'22'',7$	$-5°33'28'',9$	$-6°21'54'',8$
ρ	$0{,}04924$	$0{,}05209$	$0{,}05645$
аберр. время	$9^m18^s,4$	$9^m22^s,0$	$9^m27^s,7.$

Задача № 17. По элементамъ параболической орбиты:

$$T = 1881 \text{ Іюнь } 16{,}489005 \text{ ср. Берл. вр.}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 354°15'53'',6 \\ \Omega &= 270°58'\ 2'',8 \\ i &= 63°28'39'',1 \end{aligned}\right\} \text{средн. равнод. } 1881.0$$

$$\log q = 9{,}8657500$$

вычислить эфемериду кометы, двигающейся по этой орбитѣ, для 1881 года Іюня 23,5, Іюня 24,5 и Іюня 25,5. Наклонность экватора къ эклиптикѣ

$$\varepsilon = 23°27'17'',07.$$

Рѣшеніе. Для рѣшенія этой задачи нужно вычислить по извѣстнымъ формуламъ Гауссовы постоянныя, а затѣмъ воспользоваться слѣдующими формулами:

$$\rho \cos\alpha \cos\delta = q_a \sin(A' + v + \omega) \sec^2 \frac{v}{2} + X'$$

$$\rho \sin\alpha \cos\delta = q_b \sin(B' + v + \omega) \sec^2 \frac{v}{2} + Y'$$

$$\rho \sin\delta = q_c \sin(C' + v + \omega) \sec^2 \frac{v}{2} + Z',$$

гдѣ

$$q_a = q \sin a',$$
$$q_b = q \sin b',$$
$$q_c = q \sin c'.$$

Въ данномъ случаѣ мы находимъ:

$$A' + \omega = 356°25'50'',00 \qquad \log q_a = 9,5158673$$
$$B' + \omega = 243\ 25\ 18\ ,17 \qquad \log q_b = 9,8576287$$
$$C' + \omega = 328\ 28\ 51\ ,95 \qquad \log q_c = 9,8271323.$$

Послѣ этого эфемерида вычисляется по нижеслѣдующей схемѣ, причемъ при опредѣленіи истинной аномаліи v мы воспользовались готовыми таблицами.

1881	Іюня 23,5	Іюня 24,5	Іюня 25,5
$t - T$	0,8457797	0,9036864	0,9547728
M	1,0471547	1,1050614	1,1561478
v	15°21′ 4″,45	17°28′40″,14	19°34′49″,52
$\frac{1}{2} v$	7°40′32″,22	8°44′20″,07	9°47′24″,76
$\cos^2 \frac{1}{2} v$	9,9921825	9,9898576	9,9872577
$A' + v + \omega$	11°46′54″,45	13°54′30″,14	16° 0′39″,52
$B' + v + \omega$	258°46′22″,62	260°53′58″,31	263° 0′ 7″,69
$C' + v + \omega$	343°49′56″,40	345°57′32″,09	348° 3′41″,47
$\sin (A' + v + \omega)$	9.3100237	9,3808801	9,4406282
$q_a \sec^2 \frac{1}{2} v$	9,5236848	9,5260097	9,5286096
x'	+ 0,0681881	+ 0,0807030	+ 0,0931618
X'	— 0,0447701	— 0,0616745	— 0,0785620
$\sin (B' + v + \omega)$	$9,9916085_n$	$9,9944986_n$	$9,9967527_n$
$q_b \sec^2 \frac{1}{2} v$	9,8654462	9,8677711	9,8703710
y'	— 0,7195397	— 0,7282319	— 0,7364168
Y'	+ 0,9316886	+ 0,9309148	+ 0,9298776
$\sin (C' + v + \omega)$	$9,4447459_n$	$9,3849223_n$	$9,3156793_n$
$q_c \sec^2 \frac{1}{2} v$	9,8349498	9,8372747	9,8398746

1881	Ікня 23,5	Іюня 24,5	Іюня 25,5
z'	— 0,1904126	— 0,1668004	— 0,1430717
Z'	+ 0,4042320	+ 0,4038956	+ 0,4034450
$\rho \sin \alpha \cos \delta = y' + Y'$	9,3266408	9,3068171	9,2865930
$\sin \alpha$	9,9973701	9,9980945	9,9987668
$\rho \cos \alpha \cos \delta = x' + X'$	8,3695498	8,2794045	8,1643469
$\rho \sin \delta = z' + Z'$	9,3300471	9,3749228	9,4155964
$\sin \delta$	9,8498729	9,8800721	9,9041050
$\rho \cos \delta$	9,3292707	9,3087226	9,2878262
α	$83^\circ 42' \ 3'',32$	$84^\circ 38' 11'',82$	$85^\circ 41' \ 3'',38$
α	$5^h 34^m 48^s,221$	$5^h 38^m 32^s,788$	$5^h 42^m 44^s,225$
δ	$45^\circ \ 3' \ 4'',37$	$49^\circ 21' \ 0'',12$	$53^\circ 18' 33'',27$
ρ	9,48017	9,49485	9,51149
аберр. время	$2^m 30^s,6$	$2^m 35^s,8$	$2^m 41^s,9.$

Задача № 18. Вычислить для малой планеты Идунны (176) моментъ ея противостоянія съ солнцемъ по прямому восхожденію для 1891 года.

Рѣшеніе. Изъ «Berliner Astronomisches Jahrbuch» за 1893 годъ выписываемъ прямыя восхожденія Идунны и солнца.

1891	Идунна	Солнце
Февр. 10	$10^h 38^m$	$21^h 37^m$
20	10 31	22 16
Марта 2	10 24	22 54.

По этимъ числамъ заключаемъ, что противостояніе имѣетъ мѣсто между 20 Февраля и 2 Марта. Вычисленія даютъ:

$$\frac{\alpha - (12^h + A)}{A' - A - (\alpha' - \alpha)} (t' - t) = \frac{15 \times 10}{45} = 3,3 \ (\text{дня}).$$

Слѣдовательно противостояніе имѣетъ мѣсто 1891 г. Февр. 23,3.

Задача № 19. Вычислить яркость малой планеты Антіопы (90) для ея оппозиціи съ солнцемъ въ 1891 году по слѣдующимъ даннымъ: $g = 7,5$, $\rho = 2,7$, $r = 3,7$.

Рѣшеніе. По формулѣ

$$M = g + 5 \log (r \rho)$$

получаемъ

$$M = 12,5.$$

Задача № 20. Даны элементы кометы Галлея:

$$i_0 = 162^\circ 18' 41'',54$$
$$\Omega_0 = \ \ 55^\circ 53' 26'',70$$
$$\omega_0 = 111^\circ \ 7' \ 5'',80,$$

отнесенные къ среднему равноденствію 1850,0. Отнести эти элементы къ среднему равноденствію 1870,0.

Рѣшеніе. Для нашего случая получаемъ:

$$l = + 16' 44'',74$$
$$\pi = + \quad 9'',59$$
$$M = \quad 172^\circ 53',7$$
$$\Omega_0 - M = \quad 242^\circ 59',7.$$

Далѣе, пользуясь формулами (128), (129) и (130), располагаемъ вычисленія слѣдующимъ образомъ:

$sin\,(\Omega_0 - M)$	$9{,}9499_n$	$\pi\,sin\,(\Omega_0 - M)$	$0{,}9317_n$
π	$0{,}9818$	$cotg\,i_0$	$0{,}4964_n$
$cos\,(\Omega_0 - M)$	$9{,}6571_n$	$-\pi \dfrac{sin\,(\Omega_0 - M)}{sin\,i_0}$	$1{,}4491$
$-\pi\,cos\,(\Omega_0 - M)$	$0{,}6389$	$\omega_1 - \omega_0$	$+ 28'',13$
$i_1 - i_0$	$+ 4'',35$	$\pi\,cotg\,i_0\,sin\,(\Omega_0 - M)$	$1{,}4281$
		$\Omega_1 - \Omega_0 - l$	$+ 26'',80$
$sin\,i_0$	$9{,}4826$	$\Omega_1 - \Omega_0$	$+ 17' 11'',54.$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$i_1 = 162^\circ 18' 45'',89$$
$$\Omega_1 = \ \ 56 \ 10 \ 38 \ ,24$$
$$\omega_1 = 111 \ \ 7 \ 33 \ ,93.$$

ГЛАВА VIII.

Общія соображенія относительно опредѣленія орбитъ небесныхъ тѣлъ изъ наблюденій.

§ 40. Число наблюденій, необходимыхъ для опредѣленія эллиптической, гиперболической или параболической орбиты небеснаго тѣла.

Мы знаемъ, что движеніе небеснаго тѣла по эллиптической или гиперболической орбитѣ опредѣляется шестью элементами i, ☊, ω, a, e и T, а движеніе небеснаго тѣла по параболической орбитѣ пятью элементами i, ☊, ω, q и T. Слѣдовательно, опредѣленіе эллиптической или гиперболической орбиты сводится къ отысканію шести неизвѣстныхъ, а опредѣленіе параболической орбиты къ отысканію пяти неизвѣстныхъ. Посмотримъ же, сколько надо имѣть наблюденій небеснаго тѣла, чтобы отысканіе въ одномъ случаѣ шести, а въ другомъ пяти неизвѣстныхъ оказалось возможнымъ.

Каждое наблюденіе даетъ намъ прямое восхожденіе α и склоненіе δ небеснаго тѣла. Отъ этихъ координатъ по формуламъ сферической астрономіи мы можемъ перейти къ долготѣ λ и широтѣ β этого тѣла.

Называя буквами ξ, η, ζ прямолинейныя прямоугольныя геоцентрическія эклиптикальныя координаты небеснаго тѣла, мы можемъ написать:

$$\xi = \rho \cos \lambda \cos \beta$$

$$\eta = \rho \sin \lambda \cos \beta$$

$$\zeta = \rho \sin \beta.$$

Здѣсь ρ есть разстояніе небеснаго тѣла до центра земли или такъ называемое геоцентрическое его разстояніе. Это разстояніе намъ неизвѣстно, и потому оно тоже подлежитъ опредѣленію.

Если буквами x, y, z мы назовемъ прямолинейныя прямоугольныя геліоцентрическія эклиптикальныя координаты небеснаго тѣла, а буквами X, Y и Z прямолинейныя прямоугольныя геоцентрическія эклиптикаль-

ныя координаты солнца, то будемъ имѣть такія соотношенія:

$$\xi = x + X$$
$$\eta = y + Y$$
$$\zeta = z + Z.$$

Координаты X, Y и Z вычисляются по долготѣ солнца L, его широтѣ B и разстоянію отъ земли R, которыя можно взять изъ астрономическаго ежегодника «Berliner Astronomisches Jahrbuch». Впрочемъ широту солнца можно считать равною нулю, и тогда $Z = 0$.

Предыдущія уравненія, если ξ, η, ζ замѣнить полярными координатами, принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \rho \cos\lambda \cos\beta &= x + X \\ \rho \sin\lambda \sin\beta &= y + Y \\ \rho \sin\beta &= z + Z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (131)$$

Здѣсь намъ остается выразить x, y, z черезъ элементы орбиты.

Для этого служатъ формулы:

$$x = r\,[\cos(v + \omega)\cos \Omega - \sin(v + \omega)\sin \Omega \cos i]$$
$$y = r\,[\cos(v + \omega)\sin \Omega + \sin(v + \omega)\cos \Omega \cos i]$$
$$z = r \sin(v + \omega)\sin i,$$

которыя были выведены нами выше.

Три элемента i, Ω и ω входятъ въ эти формулы явно, остальные черезъ посредство r и v. Для эллипса r и v зависятъ отъ трехъ элементовъ a, e и T, что видно изъ формулъ:

$$r = a\,(1 - e\cos E)$$

$$tg\,\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\,\frac{1}{2}E$$

$$E - e\sin E = n\,(t - T),$$

служащихъ для вычисленія r и v для любого момента t.

Для гиперболы зависимость r и v отъ элементовъ a, e и T представляется формулами:

$$r = a\left(\frac{e}{\cos F} - 1\right)$$

$$tg\,\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,tg\,\frac{1}{2}F$$

$$\lambda e\,tg\,F - \log tg\left(45^\circ + \frac{1}{2}F\right) = \lambda n\,(t - T).$$

Въ случаѣ параболической орбиты r и v зависятъ только отъ двухъ элементовъ q и T и вычисляются по формуламъ:

$$tg\,\frac{1}{2}\,v + \frac{1}{3}\,tg^3\,\frac{1}{2}\,v = \frac{k\,(t - T)}{q^{3/2}\sqrt{2}}$$

$$r = \frac{q}{cos^2\,\frac{1}{2}\,v}.$$

Сначала разсмотримъ случай эллиптической или гиперболической орбиты. Одно наблюденіе, произведенное въ моментъ t_1, даетъ возможность написать три уравненія вида (131) съ семью неизвѣстными ρ_1, i, ☊, ω, a, e, T. Отсюда, очевидно, что одного наблюденія недостаточно для опредѣленія орбиты. Положимъ, что произведены два наблюденія въ моменты t_1 и t_2. Это позволитъ намъ написать шесть уравненій вида (131), а именно три для перваго наблюденія и три для второго. Эти шесть уравненій будутъ заключать восемь неизвѣстныхъ ρ_1, ρ_2, i, ☊, ω, a, e, T. Такъ какъ и въ этомъ случаѣ число уравненій меньше числа неизвѣстныхъ, то, слѣдовательно, и двухъ наблюденій недостаточно для опредѣленія орбиты. Положимъ, наконецъ, что произведены три наблюденія въ моменты t_1, t_2, t_3. Тогда третье наблюденіе дастъ возможность присоединить къ прежнимъ шести уравненіямъ еще три уравненія вида (131); но при этомъ будетъ введена еще одна новая неизвѣстная, именно разстояніе ρ_3. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть всего девять уравненій съ девятью неизвѣстными ρ_1, ρ_2, ρ_3, i, ☊, ω, a, e, T. И мы можемъ сказать, что вообще для опредѣленія эллиптической или гиперболической орбиты необходимо имѣть три наблюденія небеснаго тѣла, дающихъ α_1 и δ_1, α_2 и δ_2, α_3 и δ_3 или послѣ преобразованія λ_1 и β_1, λ_2 и β_2, λ_3 и β_3. Впрочемъ слѣдуетъ замѣтить, что по тремъ наблюденіямъ гиперболическая орбита обыкновенно никогда не опредѣляется. Для всякой вновь открытой кометы сначала опредѣляется параболическая орбита: если же явится предположеніе, что движеніе кометы происходитъ по гиперболической орбитѣ, то эта послѣдняя опредѣляется уже изъ многихъ наблюденій.

Перейдемъ теперь къ случаю параболической орбиты. Въ этомъ случаѣ одно наблюденіе даетъ возможность написать три уравненія вида (131) съ шестью неизвѣстными ρ_1, i, ☊, ω, q, T. Два наблюденія позволятъ написать шесть уравненій съ семью неизвѣстными ρ_1, ρ_2, i, ☊, ω, q, T. Значитъ какъ одного, такъ и двухъ наблюденій недостаточно для опредѣленія параболической орбиты. Наконецъ, три наблюденія приводятъ къ девяти уравненіямъ съ восемью неизвѣстными ρ_1, ρ_2, ρ_3, i, ☊, ω, q, T. Такимъ образомъ и для опредѣленія параболической орбиты

необходимо имѣть три наблюденія небеснаго тѣла, но въ этомъ случаѣ число уравненій оказывается на единицу больше числа неизвѣстныхъ. При изложеніи способа опредѣленія параболической орбиты будетъ показано, что въ этомъ случаѣ одно изъ наблюденій можно использовать особымъ образомъ.

Теперь разсмотримъ одинъ частный случай эллиптической орбиты, а именно тотъ, когда наклонность плоскости орбиты къ плоскости эклиптики равна нулю, т. е. $i = 0$. Въ этомъ случаѣ, какъ легко убѣдиться, отпадаетъ также элементъ ☊, такъ какъ онъ дѣлается вполнѣ произвольнымъ. Элементъ ω, представляющій собой угловое разстояніе перигелія отъ узла, въ этомъ случаѣ также можетъ принимать различныя значенія, которыя однако должны удовлетворять условію, чтобы сумма $\omega +$ ☊ оставалась величиной постоянной. Эта сумма есть долгота перигелія, замѣняющая въ данномъ случаѣ два элемента: долготу восходящаго узла и угловое разстояніе перигелія отъ узла. Долгота перигелія и въ этомъ случаѣ есть вполнѣ опредѣленная величина и отсчитывается отъ точки весенняго равноденствія.

Формулы, служащія для опредѣленія x, y и z, обращаются въ такія:

$$x = r \cos(v + \pi), \quad y = r \sin(v + \pi), \quad z = 0.$$

Уравненія (131) замѣняются слѣдующими уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} \rho \cos\lambda &= r \cos(v + \pi) + X \\ \rho \sin\lambda &= r \sin(v + \pi) + Y. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (132)$$

Въ эти уравненія черезъ посредство r и v входятъ элементы a, e и T. Значитъ, въ томъ случаѣ, когда движеніе небеснаго тѣла происходитъ въ плоскости эклиптики, одно наблюденіе даетъ возможность написать два уравненія вида (132) съ пятью неизвѣстными ρ_1, π, a, e, T. Два наблюденія позволяютъ написать четыре уравненія съ шестью неизвѣстными ρ_1, ρ_2, π, a, e, T. Три наблюденія приводятъ къ шести уравненіямъ съ семью неизвѣстными ρ_1, ρ_2, ρ_3, π, a, e, T. Наконецъ, если произведены четыре наблюденія въ моменты t_1, t_2, t_3, t_4, то мы будемъ имѣть восемь уравненій съ восемью неизвѣстными ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, π, a, e, T. Слѣдовательно, когда движеніе небеснаго тѣла происходитъ въ плоскости эклиптики, то для опредѣленія эллиптической орбиты вообще необходимо имѣть четыре полныхъ наблюденія, которыя въ этомъ случаѣ даютъ α_1 и δ_1, α_2 и δ_2, α_3 и δ_3, α_4 и δ_4 или послѣ преобразованія λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Четырьмя наблюденіями для опредѣленія орбиты пользуются также и въ томъ случаѣ, когда плоскость орбиты наклонена къ плоскости эклиптики подъ очень малымъ угломъ.

§ 41. Выводъ уравненій, являющихся основными при опредѣленіи орбитъ изъ наблюденій.

Положимъ, что произведены три наблюденія небеснаго тѣла въ моменты t_1, t_2 и t_3. Такъ какъ координаты x, y, z небеснаго тѣла во все время движенія должны удовлетворять уравненію плоскости

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0,$$

проходящей черезъ центръ солнца, то мы имѣемъ слѣдующія условія:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1 = 0 \\ a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 z_2 = 0 \\ a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 z_3 = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (133)$$

гдѣ x, y, z со значками суть координаты, соотвѣтствующія тремъ моментамъ t_1, t_2, t_3. Разсматривая въ этихъ уравненіяхъ a_1, a_2, a_3 какъ неизвѣстныя, мы видимъ, что опредѣлить эти неизвѣстныя изъ нашихъ трехъ уравненій мы не можемъ. Правда эти уравненія имѣютъ одно очевидное рѣшеніе, а именно $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, но это рѣшеніе для насъ не годится. Единственно, что мы можемъ опредѣлить, — это отношенія двухъ неизвѣстныхъ къ третьей, но для этого достаточно какихъ нибудь двухъ изъ уравненій (133). Изъ трехъ же уравненій мы можемъ исключить всѣ три величины a_1 a_2 и a_3. Исключеніе можно было бы сдѣлать такъ. Сначала можно было бы изъ первыхъ двухъ уравненій опредѣлить $\frac{a_2}{a_1}$ и $\frac{a_3}{a_1}$ и затѣмъ выраженія этихъ отношеній въ зависимости отъ x, y, z со значками можно было бы подставить въ третье уравненіе. Такимъ образомъ мы и получили бы результатъ исключенія величинъ a_1, a_2 и a_3 изъ уравненій (133). Впрочемъ это исключеніе можно произвести гораздо проще. Мы уже сказали, что одно очевидное рѣшеніе уравненій (133) относительно величинъ a_1, a_2, a_3 есть:

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = 0.$$

Съ другой стороны, такъ какъ небесное тѣло, орбиту котораго мы желаемъ опредѣлить, существуетъ, ибо мы его наблюдали, то очевидно, что для неизвѣстныхъ a_1, a_2 и a_3, зависящихъ отъ элементовъ орбиты этого небеснаго тѣла, кромѣ значеній $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ и $a_3 = 0$ должны существовать еще другія отличныя отъ нуля значенія. А въ такомъ случаѣ мы знаемъ, что опредѣлитель изъ коэффиціентовъ при a_1, a_2 и a_3 въ

уравненіяхъ (133) долженъ быть равенъ нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть результатъ исключенія величинъ a_1, a_2, a_3 изъ уравненій (133). Этотъ результатъ мы можемъ написать въ трехъ различныхъ формахъ, если разложимъ нашъ опредѣлитель сначала по элементамъ перваго столбца, затѣмъ по элементамъ второго столбца и, наконецъ, по элементамъ третьяго столбца. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} x_1(y_2z_3 - z_2y_3) - x_2(y_1z_3 - z_1y_3) + x_3(y_1z_2 - z_1y_2) = 0 \\ y_1(x_2z_3 - z_2x_3) - y_2(x_1z_3 - z_1x_3) + y_3(x_1z_2 - z_1x_2) = 0 \\ z_1(x_2y_3 - y_2x_3) - z_2(x_1y_3 - y_1x_3) + z_3(x_1y_2 - y_1x_2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (134)$$

Очевидно, что въ такомъ видѣ эти три уравненія суть не что иное, какъ различныя формы одного же и того же уравненія. Но если бы намъ удалось на основаніи какихъ нибудь дополнительныхъ соображеній выразить числами заключенные въ скобки коэффиціенты этихъ уравненій, то мы имѣли бы уже не различныя формы одного и того же уравненія, а три независимыя между собой уравненія. Постараемся же это сдѣлать. Для этой цѣли разсмотримъ геометрическое значеніе коэффиціентовъ, заключенныхъ въ скобки.

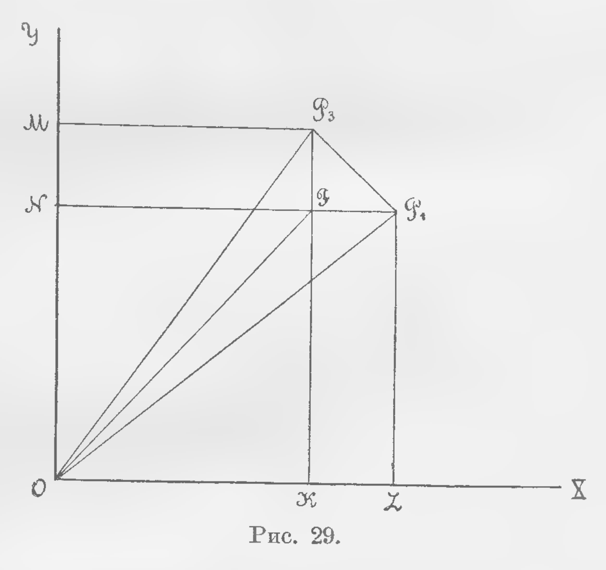


Рис. 29.

Возьмемъ коэффиціентъ $x_1y_3 - y_1x_3$ и докажемъ, что онъ представляетъ удвоенную проекцію на плоскость XOY площади треугольника, вершинами котораго служатъ солнце и два положенія небеснаго тѣла, соотвѣтствующія первому и третьему моментамъ.

Для этого обратимся къ рис. 29, плоскость котораго совпадаетъ съ плоскостью XOY. На этомъ рисункѣ P_1 и P_3 суть проекціи положеній небеснаго тѣла, соотвѣтствующихъ первому и третьему моментамъ. Далѣе

мы имѣемъ: $NP_1 = x_1$, $P_1L = y_1$, $MP_3 = x_3$, $P_3K = y_3$, $P_1F = x_1 - x_3$, $P_3F = y_3 - y_1$. Разсмотримъ теперь площадь ΔOP_3P_1. Мы видимъ, что

$$\Delta OP_3P_1 = \Delta OFP_3 + \Delta OFP_1 + \Delta P_3FP_1.$$

Поэтому

$$\Delta OP_3P_1 = \frac{1}{2} P_3F \times MP_3 + \frac{1}{2} FP_1 \times P_1L + \frac{1}{2} P_3F \times FP_1.$$

Или

$$\Delta OP_3P_1 = \frac{1}{2} (y_3 - y_1)\, x_3 + \frac{1}{2} (x_1 - x_3)\, y_1 + \frac{1}{2} (y_3 - y_1)(x_1 - x_3).$$

Раскрывая скобки, получаемъ:

$$\Delta OP_3P_1 = \frac{1}{2} (y_3x_3 - y_1x_3 + x_1y_1 - x_3y_1 + y_3x_1 - y_1x_1 - y_3x_3 + y_1x_3).$$

Послѣ приведенія имѣемъ:

$$\Delta OP_3P_1 = \frac{1}{2} (x_1y_3 - y_1x_3).$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что коэффиціентъ $x_1y_3 - y_1x_3$ представляетъ удвоенную проекцію на плоскость XOY площади треугольника, образованнаго радіусами-векторами r_1 и r_3, т. е. такого треугольника, вершинами котораго служатъ солнце и два положенія небеснаго тѣла, соотвѣтствующія моментамъ t_1 и t_3. Подобнымъ же образомъ мы вывели бы геометрическое значеніе и всѣхъ другихъ коэффиціентовъ.

Обозначимъ площадь треугольника, образованнаго радіусами-векторами r_1 и r_2, символомъ $[r_1r_2]$, площадь треугольника, образованнаго радіусами-векторами r_1 и r_3, символомъ $[r_1r_3]$ и площадь треугольника, образованнаго радіусами-векторами r_2 и r_3, символомъ $[r_2r_3]$. Далѣе, пусть будутъ i_{yz}, i_{xz} и i_{xy} углы наклоненія плоскости орбиты къ плоскостямъ координатъ YOZ, XOZ и XOY. Тогда для коэффиціентовъ уравненій (134) мы будемъ имѣть слѣдующія выраженія:

$$y_2z_3 - z_2y_3 = 2\,[r_2r_3] \cos i_{yz} \qquad x_2z_3 - z_2x_3 = 2\,[r_2r_3] \cos i_{xz}$$
$$y_1z_3 - z_1y_3 = 2\,[r_1r_3] \cos i_{yz} \qquad x_1z_3 - z_1x_3 = 2\,[r_1r_3] \cos i_{xz}$$
$$y_1z_2 - z_1y_2 = 2\,[r_1r_2] \cos i_{yz} \qquad x_1z_2 - z_1x_2 = 2\,[r_1r_2] \cos i_{xz}$$

$$x_2y_3 - y_2x_3 = 2\,[r_2r_3] \cos i_{xy}$$
$$x_1y_3 - y_1x_3 = 2\,[r_1r_3] \cos i_{xy}$$
$$x_1y_2 - y_1x_2 = 2\,[r_1r_2] \cos i_{xy}.$$

Подставляя эти выраженія коэффиціентовъ въ уравненія (134), по-

лучаемъ:

$$[r_2 r_3]\, x_1 - [r_1 r_3]\, x_2 + [r_1 r_2]\, x_3 = 0$$
$$[r_2 r_3]\, y_1 - [r_1 r_3]\, y_2 + [r_1 r_2]\, y_3 = 0$$
$$[r_2 r_3]\, z_1 - [r_1 r_3]\, z_2 + [r_1 r_2]\, z_3 = 0.$$

Въ такомъ видѣ эти уравненія являются уже независимыми другъ отъ друга. Окончательно мы ихъ представимъ такъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\, x_1 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\, x_3 &= x_2 \\ \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\, y_1 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\, y_3 &= y_2 \\ \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\, z_1 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\, z_3 &= z_2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (135)$$

Ниже мы выведемъ формулы, по которымъ для отношеній площадей треугольниковъ, входящихъ въ уравненія (135), можно будетъ находить числовыя значенія съ большею или меньшею степенью точности. Въ формулахъ (135) координаты x, y, z со значками зависятъ отъ элементовъ орбиты; но для опредѣленія этихъ элементовъ трехъ уравненій (135) недостаточно. Съ другой стороны координаты x, y и z мы можемъ замѣнить такими выраженіями:

$$x = \xi - X$$
$$y = \eta - Y$$
$$z = \zeta - Z.$$

Тогда три уравненія (135) будутъ содержать три неизвѣстныя величины ρ_1, ρ_2 и ρ_3, которыя войдутъ въ эти уравненія черезъ посредство координатъ ξ, η, ζ. Эти три неизвѣстныя уже могутъ быть опредѣлены изъ уравненій (135). Опредѣливши же геоцентрическія разстоянія, мы для нахожденія элементовъ орбиты должны будемъ вывести формулы, пользуясь геометрическими и механическими свойствами движенія небеснаго тѣла, что нами и будетъ сдѣлано впослѣдствіи.

Такимъ образомъ задача объ опредѣленіи орбиты небеснаго тѣла изъ наблюденій распадается на двѣ части. Въ первой части опредѣляются геоцентрическія разстоянія небеснаго тѣла, причемъ исходными уравненіями являются уравненія (135). Во второй части по извѣстнымъ уже геоцентрическимъ разстояніямъ небеснаго тѣла опредѣляются элементы орбиты.

§ 42. Вычисленіе отношеній площадей треугольниковъ.

Если плоскость орбиты мы примемъ за плоскость XOY, то площади треугольниковъ выразятся слѣдующими формулами:

$$[r_1 r_2] = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$[r_1 r_3] = \frac{1}{2}(x_1 y_3 - x_3 y_1)$$

$$[r_2 r_3] = \frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2).$$

Такъ какъ эти площади зависятъ отъ координатъ x_1 и y_1, x_2 и y_2, x_3 и y_3, то поставимъ себѣ такую задачу: вычислить координаты x и y для какого угодно момента t въ зависимости отъ величинъ x_0, y_0, $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$ для нѣкотораго начальнаго момента t_0. Но предварительно вмѣсто времени t введемъ другую независимую перемѣнную τ, связанную съ t уравненіемъ:

$$\tau = k\sqrt{M_{1,2}}\,(t - t_0),$$

такъ что при $t = t_0$ имѣемъ $\tau = 0$. Въ такомъ случаѣ будетъ:

$$d\tau = k\sqrt{M_{1,2}}\,dt.$$

Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія точки m_1 по отношенію къ точкѣ m_2, которыя имѣютъ видъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 M_{1,2}\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 M_{1,2}\frac{y}{r^3},$$

теперь, послѣ введенія новой независимой перемѣнной, обратятся въ такія:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}.$$

Этими уравненіями мы будемъ пользоваться при рѣшеніи нашей задачи. Задача же наша, очевидно, рѣшается непосредственно при помощи строки Маклорена. Именно мы можемъ написать:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{dx_0}{d\tau}\tau + \frac{d^2x_0}{d\tau^2}\cdot\frac{\tau^2}{1\,.\,2} + \frac{d^3x_0}{d\tau^3}\cdot\frac{\tau^3}{1.2.3} + \ldots \\ y &= y_0 + \frac{dy_0}{d\tau}\tau + \frac{d^2y_0}{d\tau}\cdot\frac{\tau^2}{1\,.\,2} + \frac{d^3y_0}{d\tau^3}\cdot\frac{\tau^3}{1.2.3} + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (136)$$

гдѣ x_0, y_0, $\frac{dx_0}{d\tau}$, $\frac{dy_0}{d\tau}$, $\frac{d^2x_0}{d\tau^2}$, $\frac{d^2y_0}{d\tau^2}$ и т. д. суть значенія координатъ x, y и ихъ производныхъ различнаго порядка по τ при $\tau = 0$. Въ формулахъ (136) члены высшаго порядка можно отбросить, такъ какъ опредѣленіе орбитъ вновь открываемыхъ небесныхъ тѣлъ, естественно, производится по тремъ наблюденіямъ, отдѣленнымъ другъ отъ друга небольшими промежутками времени, и въ этомъ случаѣ τ есть всегда правильная дробь.

Въ уравненіяхъ (136) надо производныя $\frac{d^2x_0}{d\tau^2}$, $\frac{d^2y_0}{d\tau^2}$, $\frac{d^3x_0}{d\tau^3}$, $\frac{d^3y_0}{d\tau^3}$ выразить въ зависимости отъ величинъ x_0, y_0, $\frac{dx_0}{d\tau}$, $\frac{dy_0}{d\tau}$. Уравненія движенія тотчасъ же даютъ:

$$\frac{d^2x_0}{d\tau^2} = -\frac{x_0}{r_0^3}, \quad \frac{d^2y_0}{d\tau^2} = -\frac{y_0}{r_0^3}, \quad \ldots\ldots \quad (137)$$

гдѣ $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Дифференцируя уравненія движенія еще разъ, получаемъ:

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} = \frac{3x}{r^4}\frac{dr}{d\tau} - \frac{1}{r^3}\frac{dx}{d\tau}$$

$$\frac{d^3y}{d\tau^3} = \frac{3y}{r^4}\frac{dr}{d\tau} - \frac{1}{r^3}\frac{dy}{d\tau}.$$

Замѣняя здѣсь x и y, $\frac{dx}{d\tau}$ и $\frac{dy}{d\tau}$ величинами x_0 и y_0, $\frac{dx_0}{d\tau}$ и $\frac{dy_0}{d\tau}$, въ которыя они обращаются при $\tau = 0$, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^3x_0}{d\tau^3} &= \frac{3x_0}{r_0^4}\frac{dr_0}{d\tau} - \frac{1}{r_0^3}\frac{dx_0}{d\tau} \\ \frac{d^3y_0}{d\tau^3} &= \frac{3y_0}{r_0^4}\frac{dr_0}{d\tau} - \frac{1}{r_0^3}\frac{dy_0}{d\tau}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (138)$$

Подставляя выраженія (137) и (138) въ уравненія (136) и собирая съ одной стороны члены съ x_0 и y_0, съ другой — члены съ $\frac{dx_0}{d\tau}$ и $\frac{dy_0}{d\tau}$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{r_0^3} + \frac{\tau^3}{2r_0^4}\frac{dr_0}{d\tau} + \ldots\right)x_0 + \left(\tau - \frac{\tau^3}{6r_0^3} + \ldots\right)\frac{dx_0}{d\tau} \\ y &= \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{r_0^3} + \frac{\tau^3}{2r_0^4}\frac{dr_0}{d\tau} + \ldots\right)y_0 + \left(\tau - \frac{\tau^3}{6r_0^3} + \ldots\right)\frac{dy_0}{d\tau}. \end{aligned}\right\} (139)$$

Переходя къ вычисленію координатъ x_1 и y_1, x_2 и y_2, x_3 и y_3 по этимъ формуламъ, мы должны условиться, какой моментъ принять за начальный. Принимая за начальный моментъ тотъ моментъ, которому соотвѣтствуетъ второе наблюденіе, т. е. моментъ t_2, мы должны

положить:

$$x_0 = x_2,\ y_0 = y_2,\ r_0 = r_2,\ \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dx_2}{d\tau},\ \frac{dy_0}{d\tau} = \frac{dy_2}{d\tau},\ \frac{dr_0}{d\tau} = \frac{dr_2}{d\tau}\,. \quad (140)$$

Введемъ далѣе такія обозначенія:

$$\tau_1 = k\sqrt{M_{1,2}}\,(t_3 - t_2)$$
$$\tau_2 = k\sqrt{M_{1,2}}\,(t_3 - t_1)$$
$$\tau_3 = k\sqrt{M_{1,2}}\,(t_2 - t_1).$$

При этомъ необходимо замѣтить, что между величинами τ_1, τ_2 и τ_3 существуетъ такое соотношеніе:

$$\tau_2 = \tau_1 + \tau_3.$$

Обратимъ вниманіе еще на то, что, если моменты, какъ мы и предполагаемъ, слѣдуютъ одинъ за другимъ въ такомъ порядкѣ: t_1, t_2, t_3, то всѣ три величины τ_1, τ_2 и τ_3 положительны. Съ другой же стороны, принимая моментъ t_2 за начальный, мы должны считать промежутокъ времени, отдѣляющій первое наблюденіе отъ второго, отрицательнымъ, а промежутокъ, отдѣляющій третье наблюденіе отъ второго, положительнымъ. Имѣя это въ виду, мы должны при вычисленіи x_1 и y_1 по формуламъ (139) положить $\tau = -\tau_3$, а при вычисленіи x_3 и y_3 принять $\tau = \tau_1$.

Кромѣ того необходимо сдѣлать замѣну, указываемую формулами (140).

Такимъ образомъ получаемъ:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_3^{\,2}}{r_2^{\,3}} - \frac{\tau_3^{\,3}}{2r_2^{\,4}}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right)x_2 - \left(\tau_3 - \frac{\tau_3^{\,3}}{6r_2^{\,3}} + \dots\right)\frac{dx_2}{d\tau}\\
y_1 &= \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_3^{\,2}}{r_2^{\,3}} - \frac{\tau_3^{\,3}}{2r_2^{\,4}}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right)y_2 - \left(\tau_3 - \frac{\tau_3^{\,3}}{6r_2^{\,3}} + \dots\right)\frac{dy_2}{d\tau}\\
x_3 &= \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_1^{\,2}}{r_2^{\,3}} + \frac{\tau_1^{\,3}}{2r_2^{\,4}}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right)x_2 + \left(\tau_1 - \frac{\tau_1^{\,3}}{6r_2^{\,3}} + \dots\right)\frac{dx_2}{d\tau}\\
y_3 &= \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_1^{\,2}}{r_2^{\,3}} + \frac{\tau_1^{\,3}}{2r_2^{\,4}}\frac{dr_2}{d\tau} + \dots\right)y_2 + \left(\tau_1 - \frac{\tau_1^{\,3}}{6r_2^{\,3}} + \dots\right)\frac{dy_2}{d\tau}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (141)$$

Пользуясь этими формулами, мы уже можемъ вычислить площади треугольниковъ. Начнемъ съ вычисленія площади $[r_1 r_3]$. Помня, что $[r_1 r_3] = \frac{1}{2}\,(x_1 y_3 - x_3 y_1)$, и удерживая постоянно лишь члены третьяго

порядка относительно τ_1 и τ_3, получаемъ:

$$[r_1 r_3] = \frac{1}{2}\left(\tau_1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_1\tau_3^{\,2}}{r_2^{\,3}} - \frac{\tau_1^{\,3}}{6r_2^{\,3}} + \ldots\right)\left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\tau_3 - \frac{1}{2}\frac{\tau_3\tau_1^{\,2}}{r_2^{\,3}} - \frac{\tau_3^{\,3}}{6r_2^{\,3}} + \ldots\right)\left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right).$$

Или

$$[r_1 r_3] = \frac{1}{2}\left[\tau_1 - \frac{1}{2}\frac{\tau_1\tau_3^{\,2}}{r_2^{\,3}} - \frac{\tau_1^{\,3}}{6r_2^{\,3}} + \right.$$

$$\left. + \tau_3 - \frac{1}{2}\frac{\tau_3\tau_1^{\,2}}{r_2^{\,3}} - \frac{\tau_3^{\,3}}{6r_2^{\,3}} + \ldots\right]\left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right).$$

Выраженіе, стоящее въ квадратныхъ скобкахъ, можно представить въ болѣе сжатомъ видѣ, и тогда мы будемъ имѣть:

$$[r_1 r_3] = \frac{1}{2}\left[\tau_1 + \tau_3 - \frac{(\tau_1+\tau_3)^3}{6r_2^{\,3}} + \ldots\right]\left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right).$$

Наконецъ, имѣя въ виду соотношеніе $\tau_2 = \tau_1 + \tau_3$, находимъ:

$$[r_1 r_3] = \frac{1}{2}\left(\tau_2 - \frac{\tau_2^{\,3}}{6r_2^{\,3}} + \ldots\right)\left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right).$$

Вычисленіе площадей $[r_1 r_2]$ и $[r_2 r_3]$ на основаніи формулъ (141) также не представляетъ никакихъ затрудненій. Напишемъ же вмѣстѣ формулы, служащія для вычисленія площадей треугольниковъ $[r_1 r_2]$, $[r_1 r_3]$ и $[r_2 r_3]$.

$$[r_1 r_2] = \frac{1}{2}\tau_3\left(1 - \frac{\tau_3^{\,2}}{6r_2^{\,3}} + \ldots\right)\left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right)$$

$$[r_1 r_3] = \frac{1}{2}\tau_2\left(1 - \frac{\tau_2^{\,2}}{6r_2^{\,3}} + \ldots\right)\left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right)$$

$$[r_2 r_3] = \frac{1}{2}\tau_1\left(1 - \frac{\tau_1^{\,2}}{6r_2^{\,3}} + \ldots\right)\left(x_2\frac{dy_2}{d\tau} - y_2\frac{dx_2}{d\tau}\right).$$

Эти формулы могутъ быть еще нѣсколько упрощены. На основаніи перваго закона Кеплера мы имѣемъ:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{M_{1,2}\,p},$$

гдѣ p—полупараметръ коническаго сѣченія. Вводя перемѣнную τ, предыдущее уравненіе преобразуемъ въ такое:

$$x\frac{dy}{d\tau} - y\frac{dx}{d\tau} = \sqrt{p}.$$

Примѣняя это уравненіе къ моменту t_2, получаемъ:

$$x_2 \frac{dy_2}{d\tau} - y_2 \frac{dx_2}{d\tau} = \sqrt{p}.$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$[r_1 r_2] = \frac{\sqrt{p}}{2} \tau_3 \left(1 - \frac{\tau_3^2}{6 r_2^3} + \ldots\right)$$

$$[r_1 r_3] = \frac{\sqrt{p}}{2} \tau_2 \left(1 - \frac{\tau_2^2}{6 r_2^3} + \ldots\right)$$

$$[r_2 r_3] = \frac{\sqrt{p}}{2} \tau_1 \left(1 - \frac{\tau_1^2}{6 r_2^3} + \ldots\right).$$

Но мы видѣли, что въ основныя уравненія (135) входятъ только отношенія площадей треугольниковъ. Да и вообще въ послѣдующемъ изложеніи намъ придется имѣть дѣло только съ подобными отношеніями.

Отношенія площадей треугольниковъ, входящія въ основныя уравненія (135), представляются формулами:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(1 - \frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{6 r_2^3} + \ldots\right)$$

$$\frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_2} \left(1 - \frac{\tau_3^2 - \tau_2^2}{6 r_2^3} + \ldots\right)$$

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \left(1 - \frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{6 r_2^3} + \ldots\right).$$

Замѣтимъ, что въ эти формулы входитъ неизвѣстная величина r_2. Если мы на основаніи какихъ-нибудь соображеній вмѣсто r_2 можемъ получить нѣкоторое приближенное его значеніе, то, очевидно, отношенія площадей треугольниковъ могутъ быть выражены числами. Правда, намъ еще неизвѣстна масса m_1 вновь открытаго тѣла, которая входитъ въ перемѣнную $\tau = k\sqrt{M_{1,2}}\,(t - t_0)$ черезъ посредство величины $M_{1,2}$. Но вѣдь вновь открываемыя тѣла (кометы и малыя планеты) обладаютъ такою ничтожною массой, что можно положить $M_{1,2} = 1$.

§ 43. Подготовка наблюденій.

При изложеніи способовъ перваго опредѣленія параболической и эллиптической орбитъ изъ наблюденій мы будемъ за основную плоскость принимать плоскость эклиптики, а слѣдовательно положенія небесныхъ тѣлъ будемъ опредѣлять эклиптикальными координатами. Въ наши фор-

мулы будутъ входить также координаты солнца. Широтой солнца по ея малости, мы будемъ пренебрегать, что внесетъ въ наши формулы значительныя упрощенія. Геоцентрическія долготы солнца и его разстоянія отъ земли даются въ астрономическихъ ежегодникахъ для ряда равноотстоящихъ моментовъ, напр., въ ежегодникѣ «Berliner Astronomisches Jahrbuch» для каждаго средняго Берлинскаго полудня. Пользуясь этими данными, мы легко можемъ опредѣлить значенія геоцентрической долготы L солнца и его разстоянія R отъ земли для любого момента. Необходимыя для этого формулы были выведены въ курсѣ сферической астрономіи въ главѣ объ интерполированіи *). Если моменты наблюденій выражены въ мѣстномъ времени, то необходимо принять во вниманіе разность долготъ между мѣстомъ наблюденія и Берлиномъ. Моменты наблюденій надо выразить въ доляхъ сутокъ, для чего можетъ служить таблица, данная въ нашемъ Курсѣ Сферической Астрономіи на стр. 294. Замѣтимъ, что долгота L солнца дается въ астрономическомъ ежегодникѣ освобожденной отъ вліянія аберраціи и отнесенной къ средней равноденственной точкѣ начала года.

Изъ наблюденій небесныхъ тѣлъ (малыхъ планетъ и кометъ) опредѣляются непосредственно ихъ прямыя восхожденія α и склоненія δ. Такъ какъ полученныя изъ наблюденій координаты α и δ суть видимыя, то необходимо освободить ихъ отъ вліянія прецессіи, нутаціи, аберраціи и параллакса.

Чтобы освободить координаты α и δ отъ вліянія прецессіи и нутаціи, мы должны отнести ихъ къ средней равноденственной точкѣ начала года. Для этого нужно **) изъ прямого восхожденія α и склоненія δ вычесть поправки, выражающіяся формулами:

$$\Delta\alpha = f + g \sin (G + \alpha) \operatorname{tg} \delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (142)$$

$$\Delta\delta = g \cos (G + \alpha) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (143)$$

Обращаемся къ освобожденію координатъ небеснаго тѣла отъ вліянія аберраціи. Изъ курса сферической астрономіи ***) мы знаемъ, что для освобожденія положеній планетъ или кометъ отъ аберраціи должны быть извѣстны разстоянія этихъ свѣтилъ отъ земли. Однако при опредѣленіи орбитъ вновь открытыхъ тѣлъ эти разстоянія неизвѣстны. Съ другой стороны вліяніе аберраціи вообще не настолько незначительно, чтобы имъ, хотя бы и при приближенномъ опредѣленіи орбиты, можно было пренебречь. Поэтому, по предложенію Гаусса, при первомъ опредѣленіи орбиты

*) А. А. Ивановъ. Курсъ Сферической Астрономіи. СПБ. 1911. Глава II.
**) А. А. Ивановъ. Курсъ Сферической Астрономіи. СПБ. 1911, стр. 206—208.
***) А. А. Ивановъ. Курсъ Сферической Астрономіи. СПБ. 1911, стр. 154—156.

вновь открытаго небеснаго тѣла его координаты освобождають только отъ такъ называемой аберраціи неподвижныхъ звѣздъ. Но такъ какъ лучъ свѣта, достигшій земного наблюдателя въ моментъ t, покинулъ въ дѣйствительности небесное тѣло въ моментъ $t_0 = t - \Delta t$, гдѣ Δt есть промежутокъ времени, употребляемый свѣтомъ для прохожденія разстоянія отъ небеснаго тѣла до земного наблюдателя, то координаты свѣтила, освобожденныя отъ аберраціи неподвижныхъ звѣздъ, опредѣлятъ направленіе прямой линіи, соединяющей положеніе земли въ моментъ t съ положеніемъ небеснаго тѣла въ моментъ t_0.

Для освобожденія координатъ свѣтила отъ аберраціи неподвижныхъ звѣздъ, надо *) вычесть изъ прямого восхожденія α и склоненія δ поправки, выражающіяся формулами:

$$\Delta\alpha = h \sin (H + \alpha) \sec \delta \quad \ldots \ldots \quad (144)$$

$$\Delta\delta = h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta \quad \ldots \ldots \quad (145)$$

Когда разстоянія отъ небеснаго тѣла до земли будутъ найдены, то, опредѣливши аберраціонное время Δt, мы должны каждое положеніе небеснаго тѣла, исправленное указаннымъ образомъ, считать относящимся не къ моменту наблюденія t, а къ моменту $t_0 = t - \Delta t$.

Мы имѣемъ право пользоваться указаннымъ методомъ Гаусса для учета вліянія аберраціи, такъ какъ въ излагаемыхъ ниже способахъ опредѣленія орбитъ по тремъ наблюденіямъ не требуется, чтобы разсматриваемыя нами соотвѣтствующія положенія земли и небеснаго тѣла относились къ однимъ и тѣмъ же моментамъ. Само собою разумѣется, что подъ геоцентрическимъ разстояніемъ намъ придется тогда понимать разстояніе между разновременными положеніями центровъ земли и небеснаго тѣла.

Для освобожденія координатъ отъ вліянія параллакса, т. е. для приведенія ихъ къ центру земли намъ надо прибавить къ этимъ координатамъ нѣкоторыя поправки. Формулы для вычисленія этихъ поправокъ были выведены въ курсѣ сферической астрономіи **). Чтобы имѣть возможность пользоваться ими, надо знать геоцентрическія разстоянія. Поэтому при первомъ опредѣленіи орбиты приходится сначала пренебрегать вліяніемъ параллакса, а затѣмъ, когда станутъ извѣстными геоцентрическія разстоянія, можно исправить координаты небеснаго тѣла за вліяніе параллакса и вновь вычислить различныя зависящія отъ этихъ координатъ величины. Однако это значительно увеличило бы работу. Поэтому, имѣя въ виду, что вліяніе параллакса незначительно, и что для всякаго вновь открытаго небеснаго тѣла ищутся только приближенные элементы, мы можемъ совсѣмъ пренебречь вліяніемъ параллакса.

---

*) А. А. Ивановъ. Курсъ Сферической Астрономіи. СПБ. 1911, стр. 206—208.
**) А. А. Ивановъ. Курсъ Сферической Астрономіи. СПБ. 1911, стр. 115.

Найденныя нами послѣ указанныхъ исправленій прямое восхожденіе α и склоненіе δ будутъ освобождены отъ вліянія аберраціи и отнесены къ средней равноденственной точкѣ начала года. Послѣ этого экваторіальныя координаты α и δ мы должны обратить въ эклиптикальныя λ и β. Необходимыя для этого формулы были даны въ курсѣ сферической астрономіи *). При обращеніи экваторіальныхъ координатъ въ долготу λ и широту β надо пользоваться среднею наклонностью ε экватора къ эклиптикѣ для начала года; эта величина дается въ астрономическихъ ежегодникахъ.

Замѣтимъ еще, что величины f, g, G, h, H, i, необходимыя для исправленія наблюденій за прецессію, нутацію и аберрацію, также даются въ астрономическихъ ежегодникахъ; напр., въ ежегодникѣ «Berliner Astronomisches Jahrbuch» онѣ даны для каждой средней Берлинской полуночи.

Вычисленіе поправокъ за прецессію, нутацію и аберрацію производится помощью четырехзначныхъ, а обращеніе α и δ въ λ и β помощью шестизначныхъ логариѳмовъ.

§ 44. Формулы, выражающія вліяніе аберраціи на долготу и широту, въ предположеніи эллиптическаго движенія земли вокругъ солнца.

При подготовкѣ наблюденій можно поступать и иначе. Экваторіальныя координаты α и δ небеснаго тѣла можно сначала обратить въ долготы и широты, причемъ въ этомъ случаѣ надо пользоваться видимыми наклонностями экватора къ эклиптикѣ. Затѣмъ полученныя долготы и широты необходимо исправить за прецессію и нутацію и освободить отъ аберраціи неподвижныхъ звѣздъ по правиламъ, изложеннымъ въ нашемъ Курсѣ Сферической Астрономіи въ §§ 46, 49 и 40.

Въ курсѣ сферической астрономіи формулы, выражающія вліяніе аберраціи на долготу и широту, были выведены въ предположеніи, что земля движется вокругъ солнца по окружности круга. Въ дѣйствительности же это движеніе происходитъ по эллиптической орбитѣ, и въ зависимости отъ этого въ формулахъ, выражающихъ вліяніе аберраціи, появляются добавочные члены, которые впрочемъ въ большинствѣ случаевъ безъ всякаго ущерба для точности могутъ быть отброшены, такъ что эти добавочные члены скорѣе имѣютъ теоретическій интересъ.

Тѣмъ не менѣе мы выведемъ здѣсь болѣе точныя формулы аберраціи, въ которыхъ примемъ во вниманіе эксцентриситетъ земной орбиты. Въ

*) А. А. Ивановъ. Курсъ Сферической Астрономіи. СПБ. 1911, § 15.

курсѣ сферической астрономіи были выведены формулы такого вида:

$$\left.\begin{aligned} \lambda - \lambda_0 &= k \sec\beta_0 \cos(\lambda_{\odot} - \lambda_0) \\ \beta - \beta_0 &= k \sin\beta_0 \sin(\lambda_{\odot} - \lambda_0), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (146)$$

гдѣ λ_0 и β_0 суть видимыя координаты свѣтила, λ и β исправленныя за аберрацію его координаты, $\lambda_{\odot}$—долгота солнца, k—постоянная аберраціи.

Уравненіе эллиптической орбиты въ полярныхъ координатахъ имѣетъ видъ:

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (147)$$

При движеніи земли по эллиптической орбитѣ направленіе этого движенія всегда совпадаетъ съ направленіемъ касательной къ эллипсу, которая вообще не будетъ перпендикулярна къ радіусу-вектору. Положимъ, что S есть центръ солнца, а T—центръ земли въ нѣкоторый моментъ (рис. 30). Пусть въ безконечно-малый промежутокъ времени dt земля перемѣстилась изъ точки T въ точку T'. Мы можемъ считать, что элементъ TT' совпадаетъ съ касательной и направленъ въ сторону апекса K. Такъ какъ эксцентриситетъ земной орбиты малъ, то уголъ STK, составляемый радіусомъ-векторомъ земли ST съ касательной TK, мало отличается отъ 90°. Положимъ, что онъ равняется $90^\circ - i$. Въ такомъ случаѣ разность между геоцентрическими долготой солнца и долготой апекса будетъ не 90°, а $90^\circ - i$, и слѣдовательно вмѣсто долготы апекса надо взять $\lambda_{\odot} - 90^\circ + i$ или вмѣсто $\lambda_{\odot}$ надо взять $\lambda_{\odot} + i$.

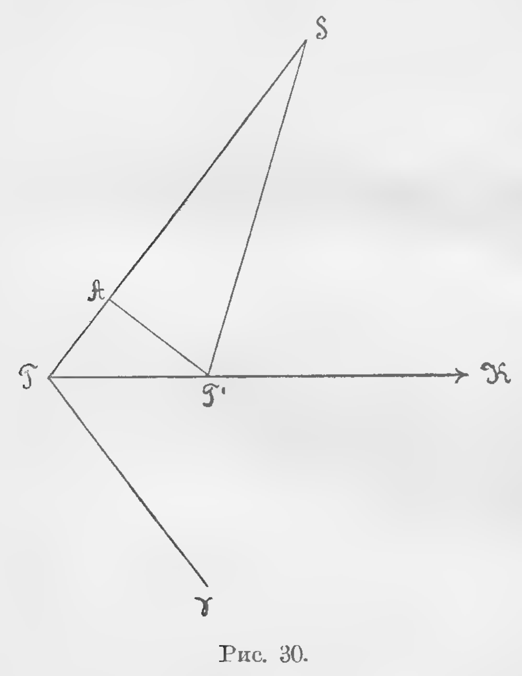


Рис. 30.

Далѣе, постоянная аберраціи k выражается такъ:

$$\frac{w_0}{W \sin 1''},$$

гдѣ w_0 есть средняя скорость движенія земли, а W — скорость движенія свѣта, причемъ въ сферической астрономіи мы среднюю скорость w_0

взяли вмѣсто истинной скорости w. Поэтому, чтобы вывести точныя формулы, постоянную аберраціи k надо умножить на отношеніе $\frac{w}{w_0}$ истинной скорости земли къ средней.

Но мы знаемъ, что скорость w выражается такой формулой:

$$w = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Здѣсь производную $\frac{dr}{dt}$ мы можемъ выразить въ зависимости отъ производной $\frac{dv}{dt}$ на основаніи слѣдующихъ соображеній. На рис. 30 опустимъ изъ точки T' перпендикуляръ $T'A$ на радіусъ-векторъ ST. Тогда можно принять, что $TA = -dr$, такъ какъ въ нашемъ случаѣ радіусъ-векторъ съ теченіемъ времени уменьшается, и $AT' = rdv$.

Изъ треугольника TAT' получаемъ:

$$-dr = rdv\,tg i.$$

Отсюда легко находимъ:

$$\frac{dr}{dt} = -r\frac{dv}{dt}\,tg i.$$

Поэтому скорость w можемъ выразить такъ:

$$w = r\frac{dv}{dt}\sqrt{1 + tg^2 i} = r\frac{dv}{dt}\sec i.$$

Производную $\frac{dv}{dt}$ найдемъ изъ закона площадей. Мы имѣемъ

$$\frac{1}{2}r^2\frac{dv}{dt} = \frac{\pi ab}{P} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P},$$

гдѣ P есть продолжительность полнаго оборота земли вокругъ солнца.

Отсюда выводимъ:

$$r\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{Pr} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2\pi}{P}(1 + e\cos v).$$

Поэтому для скорости w будемъ имѣть такую формулу:

$$w = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2\pi}{P}(1 + e\cos v)\sec i.$$

Ограничиваясь первыми степенями эксцентриситета, мы должны положить:

$$w = \frac{2\pi a}{P}(1 + e\cos v),$$

ибо уголъ i есть малая величина того же порядка, какъ и эксцентриситетъ e, выраженный въ угловой мѣрѣ, и потому мы приняли $sec\, i = 1$. Покажемъ же, что уголъ i есть малая величина перваго порядка. Выше мы нашли:

$$tg i = -\frac{1}{r}\frac{dr}{dv}.$$

Составимъ сначала производную $\frac{dr}{dv}$. Она будетъ:

$$\frac{dr}{dv} = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 + e\cos v)^2}\, e \sin v.$$

Послѣ этого будемъ имѣть:

$$tg i = -\frac{(1 + e\cos v)}{a\,(1 - e^2)}\,\frac{a\,(1 - e^2)}{(1 + e\cos v)^2}\, e \sin v = -\frac{e\sin v}{1 + e\cos v}$$

или

$$i \sin 1'' = -\frac{e\sin v}{1 + e\cos v},$$

т. е. $i\sin 1''$ есть малая величина того же порядка, какъ и эксцентриситетъ e.

Такъ какъ скорость движенія земли по круговой орбитѣ выражается формулой

$$w_0 = \frac{2\pi a}{P},$$

то для полученія точныхъ формулъ намъ надо въ формулахъ (146) вмѣсто $\lambda_\odot$ и k подставить соотвѣтственно $\lambda_\odot + i$ и $k\,(1 + e\cos v)$. Тогда получимъ:

$$\lambda - \lambda_0 = k\,(1 + e\cos v)\cos(\lambda_\odot + i - \lambda_0)\sec\beta_0 =$$
$$= k\,(1 + e\cos v)\sec\beta_0\,[\cos(\lambda_\odot - \lambda_0) + i\sin 1''\sin(\lambda_\odot - \lambda_0)].$$
$$\beta - \beta_0 = k\,(1 + e\cos v)\sin(\lambda_\odot + i - \lambda_0)\sin\beta_0 =$$
$$= k\,(1 + e\cos v)\sin\beta_0\,[\sin(\lambda_\odot - \lambda_0) + i\sin 1''\cos(\lambda_\odot - \lambda_0)].$$

Подставляя вмѣсто $i\sin 1''$ его величину $-\frac{e\sin v}{1 + e\cos v}$, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}\lambda - \lambda_0 &= k\sec\beta_0\,[\cos(\lambda_\odot - \lambda_0) + e\cos(\lambda_\odot - \lambda_0 - v)]\\ \beta - \beta_0 &= k\sin\beta_0\,[\sin(\lambda_\odot - \lambda_0) + e\sin(\lambda_\odot - \lambda_0 - v)].\end{aligned}\right\}\ldots (148)$$

Посмотримъ, чему равняется разность $\lambda_\odot - v$. Для этого обратимся къ рис. 31. На этомъ рисункѣ S есть солнце, T — земля и P — перигелій земной орбиты. Уголъ γSP есть геліоцентрическая долгота перигелія. Очевидно

$$\angle\,\gamma SP = \angle\,\gamma ST - \angle\,TSP = \angle\,\gamma ST - v.$$

Но $\angle \gamma S \Gamma$ есть геліоцентрическая долгота земли, которая, какъ извѣстно, равна $\lambda_{\odot} - 180^\circ$.

Поэтому

$$\angle \gamma SP = \lambda_{\odot} - v - 180^\circ \quad \text{или} \quad 180^\circ + \angle \gamma SP = \lambda_{\odot} - v.$$

Но если мы землю будемъ считать неподвижной и будемъ разсматривать видимое движеніе солнца вокругъ земли, то, когда земля находится въ P, солнце будетъ находиться въ перигеѣ S. Вполнѣ понятно, что долгота солнечнаго перигея равняется $180^\circ + \angle \gamma SP$.

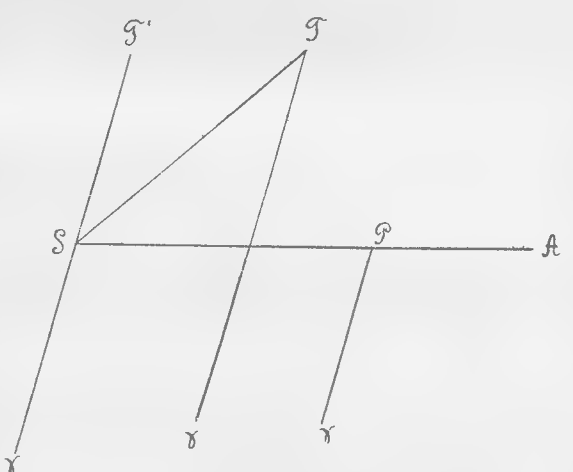


Рис. 31.

Такимъ образомъ, называя долготу солнечнаго перигея буквой Г, получаемъ

$$\Gamma = \lambda_{\odot} - v.$$

Подставляя Г вмѣсто $\lambda_{\odot} - v$ въ формулы (148), окончательно будемъ имѣть:

$$\lambda - \lambda_0 = k \cos(\lambda_{\odot} - \lambda_0) \sec\beta_0 + k e \cos(\Gamma - \lambda_0) \sec\beta_0$$
$$\beta - \beta_0 = k \sin(\lambda_{\odot} - \lambda_0) \sin\beta_0 + k e \sin(\Gamma - \lambda_0) \sin\beta_0.$$

Далѣе мы даемъ эти формулы съ численными коэффиціентами:

$$\left.\begin{aligned} \lambda - \lambda_0 &= 20'',47 \cos(\lambda_{\odot} - \lambda_0) \sec\beta_0 + 0'',34 \cos(280^\circ - \lambda_0) \sec\beta_0 \\ \beta - \beta_0 &= 20'',47 \sin(\lambda_{\odot} - \lambda_0) \sin\beta_0 + 0'',34 \sin(280^\circ - \lambda_0) \sin\beta_0. \end{aligned}\right\} \ldots (149)$$

Замѣтимъ, что добавочные члены въ формулахъ (149) не содержатъ долготы солнца.

Подобные же добавочные члены слѣдовало бы ввести въ формулы, выражающія вліяніе аберраціи на прямое восхожденіе и склоненіе. Однако при первомъ опредѣленіи орбиты этими членами по ихъ малости можно вполнѣ пренебрегать. А при болѣе точныхъ вычисленіяхъ, когда уже извѣстны приближенно разстоянія свѣтила отъ земли, аберрація принимается во вниманіе обычнымъ способомъ, изложеннымъ въ курсѣ сферической астрономіи *).

*) А. А. Ивановъ. Курсъ Сферической Астрономіи. СПБ. 1911, § 43.

ГЛАВА IX.

Опредѣленіе параболической орбиты по тремъ наблюденіямъ.

§ 45. Основныя уравненія.

Мы видѣли, что для опредѣленія параболической орбиты необходимо имѣть три наблюденія. При этомъ мы убѣдились, что три наблюденія даютъ возможность написать девять уравненій вида:

$$\left.\begin{aligned} \rho \cos\lambda \cos\beta &= x + X \\ \rho \sin\lambda \cos\beta &= y + Y \\ \rho \sin\beta &= z + Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

съ восемью неизвѣстными ρ_1, ρ_2, ρ_3, i, Ω, ω, q, T.

Такимъ образомъ одно уравненіе оказывается лишнимъ.

Но въ этомъ случаѣ мы можемъ особымъ образомъ использовать второе наблюденіе. Долгота λ_2 и широта β_2 вполнѣ опредѣляютъ направленіе отъ наблюдателя на свѣтило. Мы же будемъ разсматривать нѣкоторую плоскость, проходящую черезъ это направленіе.

Положеніе всякой плоскости $TN\mathscr{K}_2$, проходящей черезъ это направленіе, опредѣляется двумя величинами: наклонностью J_2 этой плоскости къ плоскости эклиптики и долготой восходящаго узла Π_2 этой плоскости по отношенію къ плоскости эклиптики (рис. 32). На рисункѣ 32-мъ T есть земля, и изъ точки T, какъ изъ центра, описана сфера радіусомъ, равнымъ единицѣ. Далѣе, γNM представляетъ эклиптику, $M\mathscr{K}_2$ есть кругъ широтъ, такъ что въ сферическомъ треугольникѣ $N\mathscr{K}_2M$ имѣемъ:

$$\mathscr{K}_2 M = \beta_2, \;\; \gamma N = \Pi_2, \;\; \gamma M = \lambda_2, \;\; NM = \lambda_2 - \Pi_2,$$

$$\angle \mathscr{K}_2 NM = J_2, \;\; \angle NM\mathscr{K}_2 = 90^\circ.$$

Называя сторону $N\mathscr{K}_2$ буквой u_2, получаемъ черезъ примѣненіе къ

этому треугольнику основныхъ формулъ сферической тригонометріи:

$$\cos u_2 = \cos(\lambda_2 - \Pi_2)\cos\beta_2$$
$$\sin u_2 \cos J_2 = \sin(\lambda_2 - \Pi_2)\cos\beta_2$$
$$\sin u_2 \sin J_2 = \sin\beta_2.$$

Дѣля третье уравненіе на второе, имѣемъ:

$$tg\, J_2 = \frac{tg\,\beta_2}{\sin(\lambda_2 - \Pi_2)} \quad \ldots\ldots\ldots (151)$$

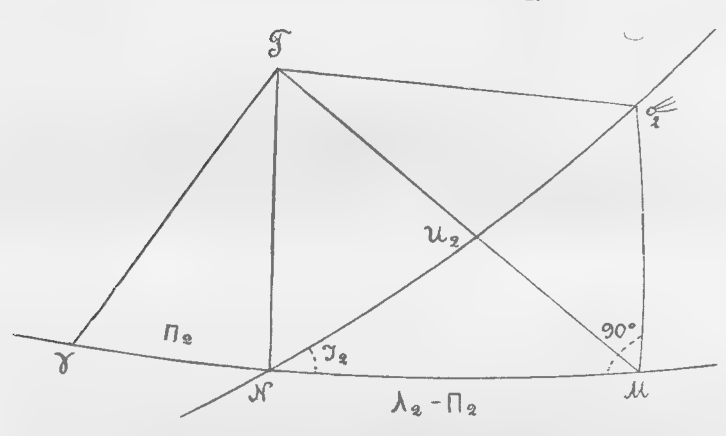


Рис. 32.

Задавшись совершенно произвольнымъ значеніемъ Π_2, мы изъ уравненія (151) опредѣлимъ J_2, и эти двѣ величины впослѣдствіи мы введемъ вмѣсто λ_2 и β_2. Величины J_2 и Π_2 пока опредѣляютъ положеніе совершенно произвольной плоскости, проходящей черезъ направленіе, идущее отъ земли къ небесному тѣлу (кометѣ). Произвольностью элемента Π_2 мы ниже воспользуемся для того, чтобы при выборѣ плоскости, опредѣляемой элементами J_2 и Π_2 по возможности упростить нашу задачу.

А теперь обратимся въ уравненіямъ

$$\rho \cos\lambda \cos\beta = x + X$$
$$\rho \sin\lambda \cos\beta = y + Y$$
$$\rho \sin\beta = z + Z,$$

въ которыхъ мы можемъ всѣ углы, считаемые въ плоскости эклиптики, уменьшить на Π_2. Это равносильно тому, что ось OX будетъ направлена не въ точку γ, а въ точку N (рис. 32). Вводя элементъ Π_2 въ правыя части этихъ уравненій, мы нѣсколько измѣнимъ видъ прямолиней-

ныхъ координатъ, но все-же правыя части нашихъ уравненій останутся функціями отъ t, i, ☊, ω, q, T.

Мы уже указывали на то, что при опредѣленіи орбиты задача распадается на двѣ части. Сначала ищутъ геоцентрическія разстоянія ρ_1, ρ_2, ρ_3, а потомъ по нимъ опредѣляютъ элементы орбиты. Займемся же опредѣленіемъ геоцентрическихъ разстояній. Вспомнимъ основныя уравненія, которыя имѣютъ видъ:

$$\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_3]} x_1 + \frac{[r_1\, r_2]}{[r_1\, r_3]} x_3 = x_2$$

$$\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_3]} y_1 + \frac{[r_1\, r_2]}{[r_1\, r_3]} y_3 = y_2$$

$$\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_3]} z_1 + \frac{[r_1\, r_2]}{[r_1\, r_3]} z_3 = z_2.$$

Положимъ, что три наблюденія, произведенныя въ моменты t_1, t_2 и t_3, намъ дали долготы λ_1, λ_2, λ_3 и широты β_1, β_2, β_3. Возьмемъ изъ Berliner Astronomisches Jahrbuch долготы солнца L_1, L_2, L_3 и его разстоянія отъ земли R_1, R_2, R_3, для тѣхъ же моментовъ. Что касается широты солнца B, то по малости ея мы ее будемъ считать равной нулю. Условившись отсчитывать углы въ плоскости эклиптики отъ точки N, а не отъ точки γ, иначе говоря, полагая, что ось OX направлена въ точку N, а не въ точку γ (рис. 32), мы вообще можемъ написать:

$$x = \rho \cos(\lambda - \Pi_2) \cos\beta - R\cos(L - \Pi_2)$$

$$y = \rho \sin(\lambda - \Pi_2) \cos\beta - R\sin(L - \Pi_2)$$

$$z = \rho \sin\beta.$$

Замѣтимъ, что эти формулы можно получить изъ формулъ, отнесенныхъ къ такой системѣ осей, въ которой ось OX направлена въ точку γ, или просто уменьшая на Π_2 всѣ углы, считаемые въ плоскости эклиптики, или по способу перехода отъ однѣхъ координатъ къ другимъ. При этомъ самыя координаты мѣняются, но разстоянія, конечно, всѣ остаются неизмѣнными Къ этому необходимо прибавить, что основныя уравненія будутъ справедливы и для новыхъ координатъ, такъ какъ эти уравненія выводятся изъ уравненія плоскости $Ax + By + Cz = 0$, въ которой происходитъ движеніе небеснаго тѣла, причемъ при новой системѣ осей коэффиціенты A, B, C выразятся нѣсколько иначе, чѣмъ при старой, но эти коэффиціенты все равно исключаются.

Примѣняя выше написанныя уравненія къ моментамъ t_1, t_2, t_3, мы получимъ координаты x, y, z со значками. Подставляя найденныя такимъ

образомъ выраженія координатъ въ основныя уравненія, мы эти послѣднія преобразуемъ слѣдующимъ образомъ:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_3]}\{\rho_1 \cos(\lambda_1 - \Pi_2)\cos\beta_1 - R_1 \cos(L_1 - \Pi_2)\} + \\
&+ \frac{[r_1\, r_2]}{[r_1\, r_3]}\{\rho_3 \cos(\lambda_3 - \Pi_2)\cos\beta_3 - R_3 \cos(L_3 - \Pi_2)\} = \\
&\qquad = \rho_2 \cos(\lambda_2 - \Pi_2)\cos\beta_2 - R_2 \cos(L_2 - \Pi_2) \\
&\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_3]}\{\rho_1 \sin(\lambda_1 - \Pi_2)\cos\beta_1 - R_1 \sin(L_1 - \Pi_2)\} + \\
&+ \frac{[r_1\, r_2]}{[r_1\, r_3]}\{\rho_3 \sin(\lambda_3 - \Pi_2)\cos\beta_3 - R_3 \sin(L_3 - \Pi_2)\} = \\
&\qquad = \rho_2 \sin(\lambda_2 - \Pi_2)\cos\beta_2 - R_2 \sin(L_2 - \Pi_2) \\
&\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_3]}\rho_1 \sin\beta_1 + \frac{[r_1\, r_2]}{[r_1\, r_3]}\rho_3 \sin\beta_3 = \rho_2 \sin\beta_2.
\end{aligned}\right\} \quad . . (152)
$$

§ 46. Выводъ уравненія, дающаго зависимость между ρ_1 и ρ_3.

Для опредѣленія элементовъ параболической орбиты намъ надо знать, какъ мы увидимъ ниже, два геоцентрическихъ разстоянія ρ_1 и ρ_3. Однако рѣшить уравненія (152) относительно ρ_1 и ρ_3, исключивши изъ нихъ ρ_2, мы не можемъ, такъ какъ въ эти уравненія входитъ еще широта β_2, которая тоже подлежитъ исключенію, въ виду того, что величины λ_2 и β_2 мы условились замѣнить величинами J_2 и Π_2. Слѣдовательно, мы должны изъ уравненій (152) исключить ρ_2 и β_2. Для этой цѣли, какъ нетрудно убѣдиться, мы можемъ воспользоваться двумя послѣдними уравненіями, которыя на основаніи соотношенія (151) перепишемъ такъ:

$$
\begin{aligned}
&\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_3]}\{\rho_1 \sin(\lambda_1 - \Pi_2)\cos\beta_1 - R_1 \sin(L_1 - \Pi_2)\} + \\
&+ \frac{[r_1\, r_2]}{[r_1\, r_3]}\{\rho_3 \sin(\lambda_3 - \Pi_2)\cos\beta_3 - R_3 \sin(L_3 - \Pi_2)\} = \\
&\qquad = \rho_2 \frac{\sin\beta_2}{tg\, J_2} - R_2 \sin(L_2 - \Pi_2)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_3]}\rho_1 \sin\beta_1 + \frac{[r_1\, r_2]}{[r_1\, r_3]}\rho_3 \sin\beta_3 = \rho_2 \sin\beta_2.
$$

Нетрудно видѣть, что если мы первое изъ этихъ уравненій умножимъ

на $\sin J_2$, а второе на—$\cos J_2$ и произведенія сложимъ, то мы исключимъ не только ρ_2, но также и β_2.

Если мы введемъ такія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} \odot_1 &= R_1 \sin(L_1 - \Pi_2) \\ \odot_2 &= R_2 \sin(L_2 - \Pi_2) \\ \odot_3 &= R_3 \sin(L_3 - \Pi_2), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (153)$$

то результатъ исключенія будетъ имѣть видъ:

$$-\rho_1 \mathscr{A}_1 \frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_3]} + \rho_3 \mathscr{A}_3 \frac{[r_1\, r_2]}{[r_1\, r_3]} = \sin J_2 \left\{\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_3]}\odot_1 + \frac{[r_1\, r_2]}{[r_1\, r_3]}\odot_3 - \odot_2\right\},$$

гдѣ для сокращенія письма положено:

$$\mathscr{A}_1 = \sin\beta_1 \cos J_2 - \sin(\lambda_1 - \Pi_2)\cos\beta_1 \sin J_2$$
$$\mathscr{A}_3 = \sin(\lambda_3 - \Pi_2)\cos\beta_3 \sin J_2 - \sin\beta_3 \cos J_2.$$

Выводя изъ полученнаго нами уравненія ρ_3, находимъ:

$$\rho_3 = \frac{\sin J_2}{\mathscr{A}_3}\left\{\frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_2]}\odot_1 - \frac{[r_1\, r_3]}{[r_1\, r_2]}\odot_2 + \odot_3\right\} + \frac{[r_2\, r_3]}{[r_1\, r_2]}\,\frac{\mathscr{A}_1}{\mathscr{A}_3}\rho_1 \quad \ldots (154)$$

Въ этомъ соотношеніи координаты λ_2 и β_2 замѣнены величинами J_2 и Π_2, изъ которыхъ вторая совершенно произвольна.

Преобразуемъ нѣсколько уравненіе (154). Легко провѣрить слѣдующее тождество:

$$\sin(A - \Pi_2)\sin(B - C) + \sin(B - \Pi_2)\sin(C - A) +$$
$$+ \sin(C - \Pi_2)\sin(A - B) = 0,$$

гдѣ A, B и C совершенно произвольные углы.

Перепишемъ это тождество въ такомъ видѣ:

$$\sin(A - B)\sin(C - \Pi_2) - \sin(A - C)\sin(B - \Pi_2) +$$
$$+ \sin(B - C)\sin(A - \Pi_2) = 0.$$

Далѣе, умножимъ его на $R_1 R_2 R_3$ и положимъ въ немъ:

$$A = L_3,\ B = L_2,\ C = L_1.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$R_1 R_2 R_3 \sin(L_3 - L_2)\sin(L_1 - \Pi_2) - R_1 R_2 R_3 \sin(L_3 - L_1)\sin(L_2 - \Pi_2) +$$
$$+ R_1 R_2 R_3 \sin(L_2 - L_1)\sin(L_3 - \Pi_2) = 0.$$

Имѣя въ виду обозначенія (153) и замѣчая вмѣстѣ съ тѣмъ, что площади треугольниковъ, образованныхъ радіусами-векторами земли R_3 и R_2, R_3 и R_1, R_2 и R_1, выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$[R_2 R_3] = \frac{1}{2} R_2 R_3 \sin (L_3 - L_2)$$

$$[R_1 R_3] = \frac{1}{2} R_1 R_3 \sin (L_3 - L_1)$$

$$[R_1 R_2] = \frac{1}{2} R_1 R_2 \sin (L_2 - L_1),$$

мы наше тождество перепишемъ въ такомъ видѣ:

$$2 [R_2 R_3] \odot_1 - 2 [R_1 R_3] \odot_2 + 2 [R_1 R_2] \odot_3 = 0.$$

Отсюда легко получаемъ

$$\frac{[R_2 \; R_3]}{[R_1 \; R_2]} \odot_1 - \frac{[R_1 \; R_3]}{[R_1 \; R_2]} \odot_2 + \odot_3 = 0.$$

Теперь очевидно, что мы, ничего не измѣняя, можемъ въ правой части уравненія (154) въ первомъ членѣ прибавить въ скобкахъ трехленъ:

$$-\frac{[R_2 \; R_3]}{[R_1 \; R_2]} \odot_1 + \frac{[R_1 \; R_3]}{[R_1 \; R_2]} \odot_2 - \odot_3.$$

Тогда уравненіе (154) приметъ видъ:

$$\rho_3 = \frac{\sin J_2}{\mathcal{D}_3} \left\{ \left(\frac{[r_2 \; r_3]}{[r_1 \; r_2]} - \frac{[R_2 \; R_3]}{[R_1 \; R_2]} \right) \odot_1 - \left(\frac{[r_1 \; r_3]}{[r_1 \; r_2]} - \frac{[R_1 \; R_3]}{[R_1 \; R_2]} \right) \odot_2 \right\} +$$

$$+ \frac{[r_2 \; r_3]}{[r_1 \; r_2]} \frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_3} \rho_1.$$

Вводя для сокращенія письма такія обозначенія:

$$\left. \begin{aligned} m = \frac{\sin J_2}{\mathcal{D}_3} \left\{ \left(\frac{[r_2 \; r_3]}{[r_1 \; r_2]} - \frac{[R_2 \; R_3]}{[R_1 \; R_2]} \right) \odot_1 - \left(\frac{[r_1 \; r_3]}{[r_1 \; r_2]} - \frac{[R_1 \; R_3]}{[R_1 \; R_2]} \right) \odot_2 \right\} \\ M = \frac{[r_2 \; r_3]}{[r_1 \; r_2]} \frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_3}, \end{aligned} \right\} \ldots (155)$$

мы получаемъ слѣдующее соотношеніе между ρ_3 и ρ_1:

$$\rho_3 = m + M \rho_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (156)$$

§ 47. Геометрическое значеніе символовъ ☄_1 и ☄_3.

Символы ☄_1 и ☄_3, выражаемые уравненіями:

$$\text{☄}_1 = \sin\beta_1 \cos J_2 - \sin(\lambda_1 - \Pi_2)\cos\beta_1 \sin J_2$$
$$\text{☄}_3 = \sin(\lambda_3 - \Pi_2)\cos\beta_3 \sin J_2 - \sin\beta_3 \cos J_2,$$

имѣютъ вполнѣ опредѣленное геометрическое значеніе. Это суть синусы сферическихъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ перваго и третьяго положеній кометы на большой кругъ $N\text{☄}_2$ (рис. 33), положеніе котораго опредѣляется тѣми же элементами J_2 и Π_2, которыми опредѣляется также положеніе плоскости $TN\text{☄}_2$ (рис. 32). Докажемъ это. Обратимся для этого къ рис. 33, на которомъ ☄_1, ☄_2, ☄_3 суть три положенія кометы и $N\text{☄}_2$ есть большой кругъ, опредѣляемый элементами J_2 и Π_2, такъ что $\gamma N = \Pi_2$ и $\angle \text{☄}_2 NA = J_2$. Далѣе $\text{☄}_1 C = P_1$, $\text{☄}_3 D = P_3$ суть сферическіе перпендикуляры, опущенные изъ перваго и третьяго положеній кометы на большой кругъ $N\text{☄}_2$. Разсмотримъ сферическіе треугольники $N\text{☄}_1 C$ и $N\text{☄}_3 D$.

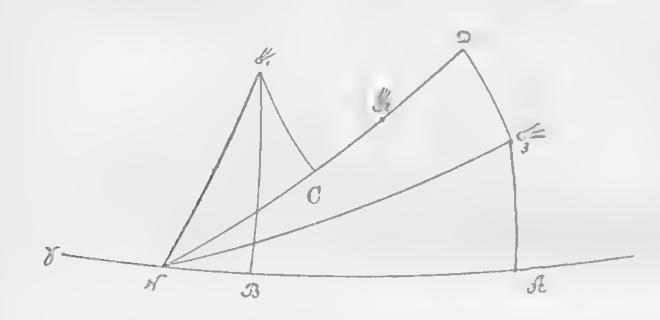


Рис. 33.

Положимъ въ нихъ $N\text{☄}_1 = u_1$, $N\text{☄}_3 = u_3$. Затѣмъ назовемъ буквами J_1 и J_3 соотвѣтственно углы $\text{☄}_1 NB$ и $\text{☄}_3 NA$.

Тогда въ треугольникѣ $N\text{☄}_1 C$ имѣемъ:

$$N\text{☄}_1 = u_1,\ \text{☄}_1 C = P_1.\ \angle \text{☄}_1 NC = J_1 - J_2,\ \angle \text{☄}_1 CN = 90^\circ.$$

Точно также въ треугольникѣ $N\text{☄}_3 D$ имѣемъ:

$$N\text{☄}_3 = u_3,\ D\text{☄}_3 = P_3,\ \angle DN\text{☄}_3 = J_2 - J_3,\ \angle ND\text{☄}_3 = 90^\circ.$$

Примѣняя къ каждому изъ этихъ треугольниковъ формулу синусовъ, получаемъ:

$$\sin u_1 \sin(J_1 - J_2) = \sin P_1$$
$$\sin u_3 \sin(J_2 - J_3) = \sin P_3.$$

Раскрывая $\sin(J_1 - J_2)$ и $\sin(J_2 - J_3)$, находимъ:

$$\sin P_1 = \sin u_1 \sin J_1 \cos J_2 - \sin u_1 \cos J_1 \sin J_2$$
$$\sin P_3 = \sin u_3 \sin J_2 \cos J_3 - \sin u_3 \cos J_2 \sin J_3.$$

Съ другой стороны разсмотримъ сферическіе треугольники $N☄_1B$ и $N☄_3A$, въ которыхъ $☄_1B$ и $☄_3A$ суть круги широтъ, проходящіе черезъ первое и третье положенія кометы. Въ первомъ изъ этихъ треугольниковъ имѣемъ:

$$N☄_1 = u_1,\ ☄_1B = \beta_1,\ NB = \lambda_1 - \Pi_2,\ \angle ☄_1NB = J_1,\ \angle NB☄_1 = 90^\circ.$$

Во второмъ треугольникѣ имѣемъ:

$$N☄_3 = u_3,\ ☄_3A = \beta_3,\ NA = \lambda_3 - \Pi_2,\ \angle ☄_3NA = J_3,\ \angle ☄_3AN = 90^\circ.$$

Примѣнимъ къ этимъ треугольникамъ основныя формулы сферической тригонометріи. Тогда будемъ имѣть:

$$\cos u_1 = \cos(\lambda_1 - \Pi_2)\cos\beta_1 \qquad \cos u_3 = \cos(\lambda_3 - \Pi_2)\cos\beta_3$$

$$\sin u_1 \cos J_1 = \sin(\lambda_1 - \Pi_2)\cos\beta_1 \qquad \sin u_3 \cos J_3 = \sin(\lambda_3 - \Pi_2)\cos\beta_3$$

$$\sin u_1 \sin J_1 = \sin\beta_1 \qquad \sin u_3 \sin J_3 = \sin\beta_3.$$

При помощи этихъ уравненій выраженія для $\sin P_1$ и $\sin P_3$ мы можемъ привести къ виду:

$$\sin P_1 = \sin\beta_1 \cos J_2 - \sin(\lambda_1 - \Pi_2)\cos\beta_1 \sin J_2$$

$$\sin P_3 = \sin(\lambda_3 - \Pi_2)\cos\beta_3 \sin J_2 - \sin\beta_3 \cos J_2.$$

Сравнивая эти выраженія съ выраженіями символовъ $☄_1$ и $☄_3$, имѣемъ:

$$☄_1 = \sin P_1, \qquad ☄_3 = \sin P_3,$$

что и требовалось доказать.

§ 48. Уравненіе Ольберса.

Займемся теперь дальнѣйшимъ преобразованіемъ уравненія (156). Мы только что показали, что символы $☄_1$ и $☄_3$ суть сферическіе перпендикуляры, опущенные изъ перваго и третьяго положеній на большой кругъ, проходящій черезъ второе положеніе кометы и опредѣляемый элементами J_2 и Π_2. При небольшихъ промежуткахъ времени, отдѣляющихъ одно наблюденіе кометы отъ другого, что на практикѣ всегда и бываетъ при первыхъ опредѣленіяхъ орбиты, очевидно, можно принимать, что вышеупомянутые сферическіе перпендикуляры, а слѣдовательно и ихъ синусы, т. е. символы $☄_1$ и $☄_3$, суть малыя величины того же порядка, какъ τ_1 и τ_3. Значитъ отношеніе $\frac{☄_1}{☄_3}$, входящее въ коэффиціентъ M

будетъ конечной величиной. Поэтому, если мы условимся отбрасывать величины второго порядка относительно τ_1, τ_2 и τ_3, то въ формулѣ

$$M = \frac{[r_2\ r_3]}{[r_1\ r_2]} \frac{\text{☄}_1}{\text{☄}_3}$$

вмѣсто отношенія площадей треугольниковъ достаточно взять $\frac{\tau_1}{\tau_3}$. Что же касается коэффиціента m, то въ немъ мы должны въ отношеніяхъ площадей треугольниковъ удержать также и члены второго порядка относительно τ_1, τ_2 и τ_3, такъ какъ этотъ коэффиціентъ m заключаетъ въ знаменателѣ малую величину перваго порядка ☄_3. Поэтому при вычисленіи m мы должны взять:

$$\frac{[r_2\ r_3]}{[r_1\ r_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \left\{1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{r_2^3}\right\}$$

$$\frac{[r_1\ r_3]}{[r_1\ r_2]} = \frac{\tau_2}{\tau_3} \left\{1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{r_2^3}\right\}.$$

Вполнѣ очевидно, что для отношенія площадей треугольниковъ, образованныхъ радіусами-векторами земли R_1, R_2, R_3, будемъ имѣть подобныя же формулы, а именно:

$$\frac{[R_2\ R_3]}{[R_1\ R_2]} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \left\{1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{R_2^3}\right\}$$

$$\frac{[R_1\ R_3]}{[R_1\ R_2]} = \frac{\tau_2}{\tau_3} \left\{1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{R_2^3}\right\}.$$

Подставляя эти отношенія площадей треугольниковъ въ уравненіе (155), будемъ имѣть:

$$m = \frac{1}{6} \frac{\sin J_2}{\text{☄}_3} \left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right] \left\{\frac{\tau_1}{\tau_3} (\tau_1^2 - \tau_3^2) \ {}_1 - \frac{\tau_2}{\tau_3} (\tau_2^2 - \tau_3^2) \ {}_2\right\}.$$

По виду величинъ ${}_1$, ${}_2$, ${}_3$, которыя выражаются уравненіями (153), можно заключить, что для небольшихъ промежутковъ времени, съ каковыми приходится имѣть дѣло при первыхъ опредѣленіяхъ орбитъ, разность между $\odot_1$ и ${}_2$ есть величина того же порядка, какъ τ_1, τ_2 или τ_3. Поэтому въ предыдущей формулѣ можно, не уменьшая точности, положить $\odot_1 = \odot_2$. Тогда получаемъ:

$$m = \frac{\odot_2}{6\tau_3} \frac{\sin J_2}{\text{☄}_3} \left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right] \{\tau_1 (\tau_1^2 - \tau_3^2) - \tau_2 (\tau_2^2 - \tau_3^2)\}.$$

Преобразуемъ здѣсь выраженіе

$$\tau_1 (\tau_1^2 - \tau_3^2) - \tau_2 (\tau_2^2 - \tau_3^2).$$

Мы имѣемъ

$$\tau_1 (\tau_1^2 - \tau_3^2) - \tau_2 (\tau_2^2 - \tau_3^2) = \tau_1 (\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 - \tau_3) -$$
$$- \tau_2 (\tau_2 + \tau_3)(\tau_2 - \tau_3).$$

Но такъ какъ

$$\tau_2 = \tau_1 + \tau_3,$$

то получаемъ:

$$\tau_1 (\tau_1^2 - \tau_3^2) - \tau_2 (\tau_2^2 - \tau_3^2) = \tau_1 \tau_2 (\tau_1 - \tau_3) - \tau_2 (\tau_2 + \tau_3) \tau_1 =$$
$$= \tau_1^2 \tau_2 - \tau_1 \tau_2 \tau_3 - \tau_2^2 \tau_1 - \tau_1 \tau_2 \tau_3 = - 2\tau_1 \tau_2 \tau_3 - \tau_1 \tau_2 (\tau_2 - \tau_1) =$$
$$= - 2\tau_1 \tau_2 \tau_3 - \tau_1 \tau_2 \tau_3 = - 3\tau_1 \tau_2 \tau_3$$

Поэтому окончательно имѣемъ:

$$m = \frac{1}{2} \tau_1 \tau_2 \sin J_2 \frac{?}{\text{☄}_3} \left[\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} \right].$$

Итакъ, уравненіе, связывающее ρ_3 съ ρ_1, теперь напишемъ въ такомъ видѣ:

$$\rho_3 = m + M\rho_1,$$

гдѣ

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \tau_1 \tau_2 \sin J_2 \frac{\odot_2}{\text{☄}_3} \left[\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3} \right] \\ M &= \frac{\tau_1}{\tau_3} \frac{\text{☄}_1}{\text{☄}_3}. \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (157)$$

До сихъ поръ положеніе большого круга, проходящаго черезъ второе положеніе кометы и опредѣляемаго элементами J_2 и Π_2, было совершенно произвольно. Ольберсъ предложилъ выбирать этотъ кругъ такъ, чтобы онъ проходилъ не только черезъ второе положеніе кометы, но также и черезъ второе положеніе солнца. Подчиненный такому условію кругъ мы будемъ называть *кругомъ Ольберса*. Для круга Ольберса элементъ Π_2, какъ легко видѣть, долженъ быть равенъ L_2.

Но тогда, какъ показываетъ выраженіе

$$\odot_2 = R_2 \sin (L_2 - \Pi_2),$$

величина $\odot_2$ обращается въ нуль. Изъ уравненій (157) заключаемъ, что въ этомъ случаѣ $m = 0$, и слѣдовательно зависимость между ρ_3 и ρ_1 принимаетъ простѣйшій видъ, а именно:

$$\rho_3 = M\rho_1,$$

гдѣ

$$M = \frac{\tau_1}{\tau_3} \frac{\text{☄}_1}{\text{☄}_3}.$$

Символы $☄_1$ и $☄_3$ въ этомъ случаѣ вычисляются по формуламъ:

$$☄_1 = \sin\beta_1 \cos J_2 - \sin(\lambda_1 - L_2)\cos\beta_1 \sin J_2$$

$$☄_3 = \sin(\lambda_3 - L_2)\cos\beta_3 \sin J_2 - \sin\beta_3 \cos J_2,$$

причемъ J_2 опредѣлится изъ уравненія

$$tg\, J_2 = \frac{tg\,\beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)}.$$

Уголъ J_2, какъ уголъ наклоненія между двумя плоскостями, заключается въ предѣлахъ отъ 0° до 180°.

Уравненіе

$$\rho_3 = M\rho_1$$

для краткости мы будемъ называть *уравненіемъ Ольберса.*

Очевидно, коэффиціентъ M мы можемъ представить еще въ такой формѣ:

$$M = \frac{\tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{\sin\beta_1 \, cotg\, J_2 - \sin(\lambda_1 - L_2)\cos\beta_1}{\sin(\lambda_3 - L_2)\cos\beta_3 - \sin\beta_3 \, cotg\, J_2}.$$

Такимъ образомъ второе наблюденіе вошло въ уравненіе Ольберса только черезъ посредство J_2.

§ 49. Общій ходъ рѣшенія задачи объ опредѣленіи геоцентрическихъ разстояній.

Уравненіе Ольберса, имѣющее видъ:

$$\rho_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3} \frac{☄_1}{☄_3} \rho_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (158)$$

даетъ одно соотношеніе между неизвѣстными ρ_1 и ρ_3. Чтобы опредѣлить эти геоцентрическія разстоянія, надо имѣть между ними еще другое соотношеніе. Это другое соотношеніе намъ доставитъ извѣстное уравненіе Эйлера-Ламберта, которое примѣнительно къ промежутку $t_3 - t_1$ мы напишемъ такъ:

$$6k(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots \quad (159)$$

Здѣсь во второй части мы взяли знакъ —, такъ какъ при опредѣленіи орбиты вновь открытой кометы пользуются наблюденіями, отдѣленными другъ отъ друга небольшими промежутками времени, такъ что въ огромномъ большинствѣ случаевъ разность $v_3 - v_1$ истинныхъ аномалій бываетъ значительно меньше 180°.

Лѣвая часть уравненія (159) извѣстна, а въ правую часть входятъ величины r_1, r_3 и s. Постараемся выразить ихъ черезъ ρ_1 и ρ_3. Прежде всего выражаемъ r_1, r_3 и s въ зависимости отъ прямолинейныхъ прямоугольныхъ геліоцентрическихъ эклиптикальныхъ координатъ, именно:

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ r_3^2 &= x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \\ s^2 &= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (160)$$

Прямолинейныя же координаты въ свою очередь могутъ быть выражены въ зависимости отъ ρ_1 и ρ_3 при помощи слѣдующихъ формулъ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 \cos(\lambda_1 - L_2) \cos\beta_1 - R_1 \cos(L_1 - L_2) \\ y_1 &= \rho_1 \sin(\lambda_1 - L_2) \cos\beta_1 - R_1 \sin(L_1 - L_2) \\ z_1 &= \rho_1 \sin\beta_1 \\ x_3 &= \rho_3 \cos(\lambda_3 - L_2) \cos\beta_3 - R_3 \cos(L_3 - L_2) \\ y_3 &= \rho_3 \sin(\lambda_3 - L_2) \cos\beta_3 - R_3 \sin(L_3 - L_2) \\ z_3 &= \rho_3 \sin\beta_3. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; (161)$$

Въ этихъ формулахъ углы въ плоскости эклиптики считаются отъ второго положенія солнца или, иначе говоря, отъ точки пересѣченія круга Ольберса съ эклиптикой, вслѣдствіе чего долготы λ_1, λ_3, L_1 и L_3 мы уменьшили на величину L_2.

Теперь ясно, что при помощи уравненій (161) и (160) мы можемъ правую часть уравненія (159) представить, какъ функцію отъ ρ_1 и ρ_3. Въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть два алгебраическихъ уравненія (158) и (159) съ двумя неизвѣстными. Эти уравненія могутъ быть рѣшены по правиламъ алгебры, но, освобождаясь отъ радикаловъ въ уравненіи (159), мы при непосредственномъ опредѣленіи ρ_1 и ρ_3, очевидно, пришли бы къ уравненіямъ столь высокой степени, что практическаго значенія за способомъ непосредственнаго опредѣленія ρ_1 и ρ_3 признать нельзя.

Гораздо удобнѣе способъ послѣдовательныхъ гипотезъ, который несравненно скорѣе приводитъ къ цѣли. Въ общихъ чертахъ этотъ способъ состоитъ въ слѣдующемъ. Прежде всего зададимся какими нибудь значеніями для r_1 и r_3. Обыкновенно принимается $r_1 = r_3 = 1$, такъ какъ по большей части кометы открываются именно тогда, когда онѣ находятся отъ солнца приблизительно на такомъ же разстояніи, какъ и земля. Съ принятыми значеніями r_1 и r_3 изъ уравненія Эйлера-Ламберта (159) опредѣляемъ хорду s. Затѣмъ, въ третье изъ уравненій (160) подставляемъ вмѣсто прямолинейныхъ координатъ ихъ выраженія (161) въ за-

висимости отъ ρ_1 и ρ_3 и изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія исключаемъ ρ_3 при помощи соотношенія (158). Тогда окончательно мы получимъ уравненіе, связывающее s и ρ_1. Изъ этого уравненія и опредѣляемъ ρ_1. Зная ρ_1, найдемъ изъ уравненія (158) также и ρ_3. Наконецъ, правыя части перваго и второго изъ уравненій (160) выражаемъ при помощи уравненій (161) въ зависимости отъ ρ_1 и ρ_3, и такъ какъ ρ_1 и ρ_3 уже извѣстны, то и опредѣляемъ изъ этихъ уравненій (160) геліоцентрическія разстоянія r_1 и r_3. Съ этими новыми значеніями r_1 и r_3 повторяемъ въ прежнемъ порядкѣ всѣ предыдущія вычисленія и такимъ образомъ поступаемъ до тѣхъ поръ, пока значенія r_1 и r_3, выведенныя изъ уравненій (160), не совпадутъ съ тѣми ихъ значеніями, которыя были приняты за исходныя при рѣшеніи уравненія Эйлера-Ламберта (159). Въ этомъ заключается идея способа опредѣленія геоцентрическихъ, а также геліоцентрическихъ разстояній кометы.

§ 50. Рѣшеніе уравненія Эйлера-Ламберта.

Обращаясь къ подробному разсмотрѣнію способа Ольберса, покажемъ прежде всего, какъ на практикѣ рѣшается уравненіе Эйлера-Ламберта.

Это уравненіе имѣетъ видъ:

$$6k(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}.$$

Во второй части мы беремъ знакъ — по указанной выше причинѣ.

Введемъ уголъ γ уравненіемъ:

$$\sin 2\gamma = \frac{s}{r_1 + r_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (162)$$

Такъ какъ при первыхъ опредѣленіяхъ орбитъ хорда s, какъ нетрудно понять, есть всегда величина малая, а $r_1 + r_3$ приблизительно равно 2, то только что написанное уравненіе дѣйствительно можетъ быть удовлетворено нѣкоторымъ угломъ γ. При этомъ очевидно, что $\sin 2\gamma$ всегда есть величина положительная и слѣдовательно 2γ всегда лежитъ въ первой четверти.

Уравненіе Эйлера-Ламберта въ зависимости отъ угла γ представится такъ:

$$\frac{6k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = (1 + \sin 2\gamma)^{\frac{3}{2}} - (1 - \sin 2\gamma)^{\frac{3}{2}}.$$

Но такъ какъ

$$1 \pm \sin 2\gamma = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma \pm 2\sin\gamma\cos\gamma = (\cos\gamma \pm \sin\gamma)^2,$$

причемъ всегда $\cos\gamma > \sin\gamma$, то имѣемъ:

$$\frac{6k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = (\cos\gamma + \sin\gamma)^3 - (\cos\gamma - \sin\gamma)^3.$$

Раскрывая здѣсь кубы, получаемъ:

$$\frac{6k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = (\cos^3\gamma + 3\cos^2\gamma\sin\gamma + 3\cos\gamma\sin^2\gamma +$$
$$+ \sin^3\gamma) - (\cos^3\gamma - 3\cos^2\gamma\sin\gamma + 3\cos\gamma\sin^2\gamma - \sin^3\gamma).$$

Или, послѣ сокращенія и приведенія подобныхъ членовъ, будемъ имѣть:

$$\frac{6k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = 6\cos^2\gamma\sin\gamma + 2\sin^3\gamma.$$

Замѣняя $\cos^2\gamma$ равнымъ ему выраженіемъ $1 - \sin^2\gamma$, находимъ:

$$\frac{6k(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = 6\sin\gamma - 4\sin^3\gamma.$$

Раздѣлимъ это уравненіе на $2^{\frac{3}{2}}$. Тогда будемъ имѣть:

$$\frac{6k(t_3 - t_1)}{2^{\frac{3}{2}}(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = 3\left(\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}\right) - 4\left(\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}\right)^3.$$

Такимъ образомъ для опредѣленія $\sin\gamma$ мы получили кубическое уравненіе. Положимъ далѣе:

$$\sin\theta = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (163)$$

Замѣтимъ, что θ никогда не превосходитъ $30°$. Въ самомъ дѣлѣ $\gamma \leqslant 45°$; значитъ

$$\sin\gamma \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$\sin\theta \leqslant \frac{1}{2}$$

и

$$\theta \leqslant 30°.$$

Теперь наше кубическое уравненіе приметъ такой видъ:

$$\frac{6k(t_3 - t_1)}{2^{\frac{3}{2}}(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

Но изъ тригонометріи извѣстно, что

$$3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = \sin 3\theta.$$

Поэтому имѣемъ:

$$\frac{6k(t_3 - t_1)}{2^{\frac{3}{2}}(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = \sin 3\theta, \quad \dots\dots\dots (164)$$

причемъ $3\theta \leqslant 90°$.

Сопоставимъ вмѣстѣ всѣ формулы, служащія для рѣшенія уравненія Эйлера-Ламберта:

$$\sin 3\theta = \frac{6k}{2^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{t_3 - t_1}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = [8{,}5621877] \frac{t_3 - t_1}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} \qquad (3\theta \leqslant 90°)$$

$$\sin \gamma = \sqrt{2} \sin \theta = [0{,}1505150] \sin \theta \qquad (\gamma \leqslant 45°)$$

$$s = (r_1 + r_3) \sin 2\gamma.$$

Здѣсь коэффиціенты въ скобкахъ суть логариѳмы. По этимъ уравненіямъ, задавшись какимъ-нибудь значеніемъ для $r_1 + r_3$, сначала вычисляемъ уголъ θ, затѣмъ опредѣляемъ уголъ γ и наконецъ находимъ хорду s. Изложенный способъ рѣшенія предложилъ Энке.

§ 51. Опредѣленіе ρ_1 въ зависимости отъ хорды s.

Мы знаемъ, что хорда s въ зависимости отъ прямолинейныхъ координатъ выражается такимъ образомъ:

$$s^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 \quad \dots\dots (165)$$

На основаніи уравненіи (161), если ρ_3 замѣнимъ равной ему величиной $M\rho_1$, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} x_3 - x_1 &= \rho_1 [M \cos(\lambda_3 - L_2) \cos \beta_3 - \cos(\lambda_1 - L_2) \cos \beta_1] - \\ &\quad - R_3 \cos(L_3 - L_2) + R_1 \cos(L_1 - L_2) \\ y_3 - y_1 &= \rho_1 [M \sin(\lambda_3 - L_2) \cos \beta_3 - \sin(\lambda_1 - L_2) \cos \beta_1] - \\ &\quad - R_3 \sin(L_3 - L_2) + R_1 \sin(L_1 - L_2) \\ z_3 - z_1 &= \rho_1 [M \sin \beta_3 - \sin \beta_1]. \end{aligned}\right\} \dots (166)$$

Введемъ вспомогательныя величины g и G уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} g \cos G &= R_3 \cos(L_3 - L_2) - R_1 \cos(L_1 - L_2) \\ g \sin G &= R_3 \sin(L_3 - L_2) - R_1 \sin(L_1 - L_2), \end{aligned}\right\} \dots (167)$$

причемъ поставимъ условіе, чтобы всегда брать $g > 0$. Въ такомъ случаѣ четверть, въ которой лежитъ G опредѣлится безъ всякой двойственности. Далѣе, введемъ еще вспомогательныя величины h, ζ и H, зависящія отъ координатъ кометы. Пусть эти новыя вспомогательныя величины опредѣляются уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} & h \cos\zeta \cos H = M \cos(\lambda_3 - L_2)\cos\beta_3 - \cos(\lambda_1 - L_2)\cos\beta_1 \\ & h \cos\zeta \sin H = M \sin(\lambda_3 - L_2)\cos\beta_3 - \sin(\lambda_1 - L_2)\cos\beta_1 \\ & h \sin\zeta = M \sin\beta_3 - \sin\beta_1, \end{aligned}\right\} \ldots (168)$$

причемъ поставимъ условіе, чтобы всегда брать $h > 0$ и ζ въ предѣлахъ отъ $-90°$ до $+90°$. Тогда и уголъ H опредѣлится безъ всякой двойственности.

Теперь на основаніи уравненій (167) и (168) мы можемъ упростить уравненія (166) и придать имъ слѣдующій видъ:

$$x_3 - x_1 = \rho_1\, h \cos\zeta \cos H - g \cos G$$
$$y_3 - y_1 = \rho_1\, h \cos\zeta \sin H - g \sin G$$
$$z_3 - z_1 = \rho_1\, h \sin\zeta.$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (165), находимъ:

$$s^2 = \rho_1^2 h^2 - 2\rho_1 hg \cos\zeta \cos(G - H) + g^2.$$

Введемъ наконецъ еще такое обозначеніе:

$$\cos\varphi = \cos\zeta \cos(G - H).$$

По этой формулѣ угла φ опредѣлять не надо, а по $\cos\varphi$ надо подыскать соотвѣтственный $\sin\varphi$, причемъ знакъ синуса тоже для насъ не интересенъ, такъ какъ въ дальнѣйшія формулы будетъ входить $\sin^2\varphi$.

Теперь мы можемъ написать:

$$s^2 = \rho_1^2 h^2 - 2\rho_1 hg \cos\varphi + g^2.$$

Или

$$s^2 = \rho_1^2 h^2 - 2\rho_1 hg \cos\varphi + g^2 \cos^2\varphi + g^2 \sin^2\varphi.$$

Отсюда имѣемъ:

$$s^2 = (\rho_1 h - g\cos\varphi)^2 + g^2 \sin^2\varphi.$$

Опредѣляя изъ этого уравненія $\rho_1 h - g\cos\varphi$, получаемъ:

$$\rho_1 h - g\cos\varphi = \pm\sqrt{s^2 - g^2 \sin^2\varphi}.$$

Наконецъ ρ_1 въ зависимости отъ s выразится формулой:

$$\rho_1 = \frac{g}{h}\cos\varphi \pm \frac{1}{h}\sqrt{s^2 - g^2\sin^2\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (169)$$

Теперь надо рѣшить, какой знакъ взять передъ корнемъ во второй части. Очевидно, что, если $\rho_1 h - g\cos\varphi > 0$, то надо взять знакъ $+$; въ противномъ случаѣ передъ корнемъ долженъ быть поставленъ знакъ $-$.

Мы имѣли уравненіе:

$$s^2 = \rho_1^2 h^2 - 2\rho_1 hg \cos\varphi + g^2.$$

Отсюда получаемъ:

$$s^2 - g^2 = \rho_1 h (\rho_1 h - 2g \cos\varphi).$$

Изъ этого уравненія заключаемъ, что если $s > g$, то и

$$\rho_1 h - 2g \cos\varphi > 0,$$

а въ такомъ случаѣ и подавно

$$\rho_1 h - g \cos\varphi > 0.$$

Слѣдовательно, если $s > g$, то въ уравненіи (169) въ правой части надо взять знакъ $+$. Посмотримъ же, когда s будетъ больше g. Для этого выяснимъ геометрическое значеніе величины g. Изъ уравненій (167) легко получаемъ:

$$g^2 = R_1^2 + R_3^2 - 2R_1 R_3 \cos(L_3 - L_1).$$

Это уравненіе намъ показываетъ, что g есть хорда, соединяющая два положенія земли, соотвѣтствующія моментамъ t_1 и t_3. Пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что промежутокъ времени $t_3 - t_1$ малъ, вычислимъ приближенно длины хордъ g и s, замѣнивъ ихъ длинами соотвѣтственныхъ дугъ. Тогда мы можемъ написать:

$$g = V_0 (t_3 - t_1),$$
$$s = V (t_3 - t_1),$$

гдѣ V_0 и V суть скорости движенія земли и кометы. Скорости V_0 и V можемъ вычислить на основаніи интеграла живой силы, который вообще имѣетъ видъ:

$$V^2 = k^2 M_{1,2} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Ограничиваясь лишь приближеннымъ подсчетомъ, можемъ принять $M_{1,2} = 1$ и тогда будемъ имѣть:

$$V^2 = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Для земли примемъ круговое движеніе, т. е. положимъ $r = a$.

Считая кромѣ того $a = 1$, имѣемъ:

$$V_0 = k.$$

Для кометы должны взять $a = \infty$ и тогда получимъ:

$$V = k\sqrt{\frac{2}{r}}.$$

Поэтому находимъ:

$$g = k\,(t_3 - t_1), \qquad s = k\sqrt{\frac{2}{r}}\,(t_3 - t_1),$$

гдѣ r есть разстояніе кометы отъ солнца.

Изъ сравненія этихъ выраженій для g и s мы видимъ, что s будетъ больше g тогда, когда r меньше 2. Слѣдовательно, если комета открыта на такомъ разстояніи отъ солнца, которое меньше двойного разстоянія земли отъ солнца, то въ уравненіи (169) во второй части передъ корнемъ надо брать знакъ $+$. Но такъ какъ съ другой стороны кометы очень рѣдко открываются на большемъ разстояніи отъ солнца, чѣмъ двойное разстояніе земли отъ солнца, то на практикѣ въ уравненіи (169) почти всегда предъ корнемъ приходится брать знакъ $+$.

Такимъ образомъ для опредѣленія ρ_1 въ зависимости отъ s имѣемъ уравненіе:

$$\rho_1 = \frac{g\,cos\,\varphi + \sqrt{s^2 - g^2\,sin^2\varphi}}{h} \quad \dots\dots\dots \quad (170)$$

§ 52. Опредѣленіе r_1 и r_3 въ зависимости отъ ρ_1.

Подставляя выраженія координатъ (161) въ первыя два изъ уравненій (160), получаемъ:

$$r_1^{\,2} = \rho_1^{\,2} - 2\rho_1 R_1\,cos\,\beta_1\,cos\,(\lambda_1 - L_1) + R_1^{\,2}$$
$$r_3^{\,2} = \rho_3^{\,2} - 2\rho_3 R_3\,cos\,\beta_3\,cos\,(\lambda_3 - L_3) + R_3^{\,2}.$$

Исключая изъ второго изъ этихъ уравненій ρ_3 при помощи соотношенія

$$\rho_3 = M\rho_1,$$

находимъ:

$$r_1^{\,2} = \rho_1^{\,2} - 2\rho_1 R_1\,cos\,\beta_1\,cos\,(\lambda_1 - L_1) + R_1^{\,2},$$
$$r_3^{\,2} = M^2\rho_1^{\,2} - 2M\rho_1\,R_3\,cos\,\beta_3\,cos\,(\lambda_3 - L_3) + R_3^{\,2}.$$

Эти выраженія мы нѣсколько преобразуемъ на основаніи слѣдующихъ геометрическихъ соображеній. Проведемъ черезъ положенія кометы P и

солнца S для нѣкотораго момента t большой кругъ SP на сферѣ, описанной изъ центра земли радіусомъ, равнымъ единицѣ (рис. 34). Положимъ, что γSC на этой сферѣ представляетъ эклиптику. Пусть PC есть кругъ широтъ. Разсмотримъ сферическій треугольникъ SPC. Въ немъ $PC=\beta$, $SC=\lambda-L$, $\angle PCS=90°$. Обозначимъ далѣе сторону SP буквой ψ, а уголъ PSC буквой P. Тогда, примѣняя основныя формулы сферической тригонометріи къ треугольнику SPC, получимъ:

$$\cos\psi = \cos(\lambda - L)\cos\beta$$
$$\sin\psi\cos P = \sin(\lambda - L)\cos\beta$$
$$\sin\psi\sin P = \sin\beta.$$

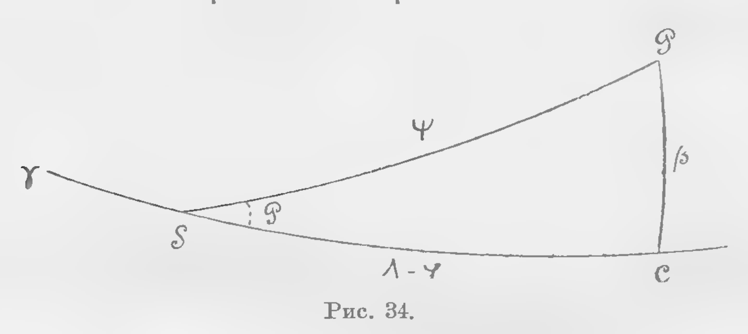


Рис. 34.

Примѣняя эти формулы къ моментамъ t_1 и t_3, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos\psi_1&=\cos(\lambda_1-L_1)\cos\beta_1 & \cos\psi_3&=\cos(\lambda_3-L_3)\cos\beta_3\\ \sin\psi_1\cos P_1&=\sin(\lambda_1-L_1)\cos\beta_1 & \sin\psi_3\cos P_3&=\sin(\lambda_3-L_3)\cos\beta_3\\ \sin\psi_1\sin P_1&=\sin\beta_1 & \sin\psi_3\sin P_3&=\sin\beta_3. \end{aligned}\right\}\quad(171)$$

По этимъ формуламъ углы ψ_1, P_1 и ψ_3, P_3 опредѣляются безъ всякой двойственности, причемъ ψ_1 и ψ_3, какъ углы между двумя направленіями, именно отъ земли къ солнцу и отъ земли къ кометѣ, всегда заключаются въ предѣлахъ отъ 0° до 180°. Углы P_1 и P_3 въ дальнѣйшемъ намъ не понадобятся.

Пользуясь вспомогательными величинами ψ_1 и ψ_3, мы выраженія для r_1^2 и r_3^2 представимъ въ такомъ видѣ:

$$r_1^2=\rho_1^2-2\rho_1 R_1\cos\psi_1+R_1^2,\quad r_3^2=M^2\rho_1^2-2M\rho_1 R_3\cos\psi_3+R_3^2.$$

Эти соотношенія могутъ быть получены изъ прямолинейныхъ треугольниковъ, вершинами которыхъ служатъ одновременныя положенія солнца, земли и кометы. причемъ ψ_1 и ψ_3 въ этихъ треугольникахъ представляютъ углы при землѣ.

Вводя при R_1^2 множитель

$$\cos^2\psi_1+\sin^2\psi_1=1,$$

а при R_3^2 множитель

$$\cos^2\psi_3 + \sin^2\psi_3 = 1,$$

получаемъ:

$$r_1 = \sqrt{(\rho_1 - R_1 \cos\psi_1)^2 + R_1^2 \sin^2\psi_1},$$

$$r_3 = \sqrt{(M\rho_1 - R_3 \cos\psi_3)^2 + R_3^2 \sin^2\psi_3}.$$

Положимъ далѣе:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\theta_1 &= \frac{\rho_1 - R_1 \cos\psi_1}{R_1 \sin\psi_1} \\ tg\,\theta_3 &= \frac{M\rho_1 - R_3 \cos\psi_3}{R_3 \sin\psi_3}, \end{aligned}\right\} \dots\dots \quad (172)$$

причемъ θ_1 и θ_3 могутъ лежать либо въ первой, либо въ четвертой четверти.

Въ такомъ случаѣ предыдущія выраженія для r_1 и r_3 легко приводимъ къ виду:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= R_1 \sin\psi_1 \sec\theta_1 \\ r_3 &= R_3 \sin\psi_3 \sec\theta_3. \end{aligned}\right\} \dots\dots \quad (173)$$

Такимъ образомъ для опредѣленія r_1 и r_3, когда дано ρ_1, служатъ формулы (171), (172) и (173).

Найдя r_1 и r_3, съ этими новыми значеніями въ прежнемъ порядкѣ повторяемъ всѣ вышеуказанныя вычисленія, пока наконецъ величины r_1 и r_3, полученныя въ концѣ какой-нибудь гипотезы, не совпадутъ съ исходными величинами r_1 и r_3.

§ 53. Дифференціальныя поправки.

Способъ послѣдовательныхъ гипотезъ можетъ быть нѣсколько сокращенъ, если ввести дифференціальныя поправки на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Назовемъ для краткости сумму $r_1 + r_3$ буквой σ, такъ что

$$\sigma = r_1 + r_3.$$

Положимъ, что въ началѣ какой-нибудь гипотезы мы приняли для σ нѣкоторое значеніе σ_0. Тогда сумма $r_1 + r_3$, полученная въ концѣ гипотезы, причемъ r_1 и r_3 вычислены по формуламъ (173), должна быть разсматриваема какъ функція отъ σ_0. Слѣдовательно

$$r_1 + r_3 = f(\sigma_0).$$

Положимъ, что для того, чтобы получить истинную величину σ, надо

къ σ_0 прибавить поправку $\Delta\sigma_0$, такъ что

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma_0.$$

Но, если σ есть истинная величина суммы $r_1 + r_3$, то, начиная съ нея вычисленіе въ какой-нибудь гипотезѣ, мы въ концѣ гипотезы должны получить ту же самую величину $\sigma = r_1 + r_3$. Это условіе выражается такимъ уравненіемъ:

$$\sigma = f(\sigma).$$

Замѣняя σ равной ему величиной $\sigma_0 + \Delta\sigma_0$, находимъ:

$$\sigma_0 + \Delta\sigma_0 = f(\sigma_0 + \Delta\sigma_0).$$

Такъ какъ поправка $\Delta\sigma_0$ предполагается малой, то, разлагая вторую часть уравненія по строкѣ Тэйлора и ограничиваясь первою степенью $\Delta\sigma_0$, будемъ имѣть:

$$\sigma_0 + \Delta\sigma_0 = f(\sigma_0) + f'(\sigma_0)\,\Delta\sigma_0.$$

Отсюда опредѣляемъ поправку

$$\Delta\sigma_0 = \frac{f(\sigma_0) - \sigma_0}{1 - f'(\sigma_0)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (174)$$

Такимъ образомъ, если въ какой-нибудь гипотезѣ исходной величиной служила намъ величина σ_0, то новое вычисленіе мы должны начать съ величиной $\sigma_0 + \Delta\sigma_0$. Въ уравненіи (174) величина σ_0 есть то значеніе суммы $r_1 + r_3$, которое было принято въ началѣ гипотезы, $f(\sigma_0)$ есть то значеніе этой суммы, которое получилось въ концѣ гипотезы. Что же касается производной $f'(\sigma_0)$, то мы сейчасъ выведемъ формулу для ея вычисленія. Имѣемъ:

$$f'(\sigma_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=\sigma_0} = \left(\frac{\partial r_1}{\partial \theta_1}\,\frac{\partial \theta_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial r_3}{\partial \theta_3}\,\frac{\partial \theta_3}{\partial \rho_1}\right)\frac{\partial \rho_1}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial \sigma} \text{ при } \sigma = \sigma_0.$$

Изъ уравненій (173) имѣемъ:

$$\frac{\partial r_1}{\partial \theta_1} = R_1 \sin\psi_1 \, tg\,\theta_1 \sec\theta_1$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial \theta_3} = R_3 \sin\psi_3 \, tg\,\theta_3 \sec\theta_3.$$

Изъ уравненій (172) выводимъ:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \rho_1} = \frac{\cos^2\theta_1}{R_1 \sin\psi_1}$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial \rho_1} = \frac{M\cos^2\theta_3}{R_3 \sin\psi_3}.$$

Уравненіе (170) даетъ:

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial s} = \frac{s}{h\sqrt{s^2 - g^2 \sin^2\varphi}}.$$

Для составленія производной $\frac{\partial s}{\partial\sigma}$ обращаемся къ уравненію Эйлера-Ламберта

$$6k(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}}.$$

Замѣняя сумму $r_1 + r_3$ одной буквой σ, имѣемъ:

$$6k(t_3 - t_1) = (\sigma + s)^{\frac{3}{2}} - (\sigma - s)^{\frac{3}{2}}.$$

Беря производную по σ, причемъ s считаемъ функціей отъ σ, получаемъ:

$$0 = \frac{3}{2}\sqrt{\sigma + s}\left(1 + \frac{\partial s}{\partial\sigma}\right) - \frac{3}{2}\sqrt{\sigma - s}\left(1 - \frac{\partial s}{\partial\sigma}\right).$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{\partial s}{\partial\sigma} = \frac{\sqrt{\sigma - s} - \sqrt{\sigma + s}}{\sqrt{\sigma + s} + \sqrt{\sigma - s}}.$$

Умножая числителя и знаменателя на $\sqrt{\sigma + s} - \sqrt{\sigma - s}$, получаемъ:

$$\frac{\partial s}{\partial\sigma} = -\frac{(\sqrt{\sigma - s} - \sqrt{\sigma + s})^2}{2s} = \frac{-2\sigma + 2\sqrt{\sigma^2 - s^2}}{2s}.$$

Окончательно, пользуясь формулой (162), имѣемъ:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=\sigma_0} = \frac{\sqrt{\sigma_0^2 - s^2} - \sigma_0}{s} = \frac{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma_0^2 \sin^2 2\gamma} - \sigma_0}{s} = \frac{-2\sigma_0 \sin^2\gamma}{s}.$$

Теперь составляемъ

$$\frac{\partial r_1}{\partial\theta_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial r_3}{\partial\theta_3}\frac{\partial\theta_3}{\partial\rho_1}.$$

Находимъ:

$$\frac{\partial r_1}{\partial\theta_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_1} = \sin\theta_1$$

и

$$\frac{\partial r_3}{\partial\theta_3}\frac{\partial\theta_3}{\partial\rho_1} = M\sin\theta_3.$$

Значитъ

$$\frac{\partial r_1}{\partial\theta_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_1} + \frac{\partial r_3}{\partial\theta_3}\frac{\partial\theta_3}{\partial\rho_1} = \sin\theta_1 + M\sin\theta_3.$$

Далѣе

$$\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\sigma}\right)_{\sigma=\sigma_0} = \frac{-2\sigma_0 \sin^2\gamma}{h\sqrt{s^2 - g^2\sin^2\varphi}}.$$

Отсюда окончательно получаемъ:

$$f'(\sigma_0) = -(\sin\theta_1 + M \sin\theta_3)\,\frac{2\sigma_0 \sin^2\gamma}{h\sqrt{s^2 - g^2 \sin^2\varphi}} \quad . \; . \; . \; (175)$$

Итакъ формулы (174) и (175) и служатъ для вычисленія той поправки $\Delta\sigma_0$, которую надо прибавить къ σ_0, положенному въ основаніе нѣкоторой гипотезы, чтобы получить новую величину $\sigma_0 + \Delta\sigma_0$, съ которой слѣдуетъ начать новую гипотезу.

§ 54. Опредѣленіе элементовъ параболической орбиты.

Теперь приступимъ къ рѣшенію второй части нашей задачи, т. е. къ опредѣленію элементовъ параболической орбиты по извѣстнымъ геоцентрическимъ разстояніямъ ρ_1 и ρ_3, причемъ для ρ_1 и ρ_3 мы должны взять тѣ ихъ значенія, которыя были получены въ послѣдней гипотезѣ.

Прежде всего надо вычислить геліоцентрическія координаты кометы, т. е. ея радіусъ-векторъ r, геліоцентрическую долготу l и геліоцентрическую широту b. Имѣя въ виду соотношенія

$$x = \xi - X,$$
$$y = \eta - Y,$$
$$z = \zeta - Z,$$

мы въ полярныхъ координатахъ можемъ написать:

$$r \cos l \cos b = \rho \cos\lambda \cos\beta - R \cos L$$
$$r \sin l \cos b = \rho \sin\lambda \cos\beta - R \sin L$$
$$r \sin b = \rho \sin\beta.$$

Примѣняя эти уравненія къ моменту t_1, мы съ цѣлью упрощенія вычисленій уменьшимъ всѣ углы, считаемые въ плоскости эклиптики, на L_1. Тогда получимъ:

$$r_1 \cos(l_1 - L_1) \cos b_1 = \rho_1 \cos(\lambda_1 - L_1) \cos\beta_1 - R_1$$
$$r_1 \sin(l_1 - L_1) \cos b_1 = \rho_1 \sin(\lambda_1 - L_1) \cos\beta_1$$
$$r_1 \sin b_1 = \rho_1 \sin\beta_1.$$

Примѣняя тѣ же самыя уравненія къ моменту t_3, мы уменьшимъ всѣ углы, считаемые въ плоскости эклиптики, на L_3.

Тогда будемъ имѣть:

$$r_3 \cos(l_3 - L_3) \cos b_3 = \rho_3 \cos(\lambda_3 - L_3) \cos\beta_3 - R_3$$
$$r_3 \sin(l_3 - L_3) \cos b_3 = \rho_3 \sin(\lambda_3 - L_3) \cos\beta_3.$$
$$r_3 \sin b_3 = \rho_3 \sin\beta_3.$$

По этимъ формуламъ безъ всякой двойственности опредѣляются r_1, l_1, b_1 и r_3, l_3, b_3, причемъ для r_1 и r_3 мы должны получить тѣ же самыя значенія, которыя уже были получены въ послѣдней гипотезѣ при рѣшеніи задачи объ опредѣленіи геоцентрическихъ разстояній кометы.

Пользуясь формулами § 24 и вводя въ нихъ аргументъ широты u (§ 37), будемъ имѣть:

$$\cos u = \cos(l - \Omega) \cos b$$
$$\sin u \cos i = \sin(l - \Omega) \cos b$$
$$\sin u \sin i = \sin b.$$

Примѣняя только что написанныя формулы къ моментамъ t_1 и t_3, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos u_1 = \cos(l_1 - \Omega) \cos b_1 & \cos u_3 = \cos(l_3 - \Omega) \cos b_3 \\ \sin u_1 \cos i = \sin(l_1 - \Omega) \cos b_1 & \sin u_3 \cos i = \sin(l_3 - \Omega) \cos b_3 \\ \sin u_1 \sin i = \sin b_1 & \sin u_3 \sin i = \sin b_3. \end{array}\right\} \quad (176)$$

Въ каждой изъ этихъ двухъ системъ формулъ раздѣлимъ третью формулу на вторую. Тогда получимъ:

$$tg\, i = \frac{tg\, b_1}{\sin(l_1 - \Omega)}$$

$$tg\, i = \frac{tg\, b_3}{\sin(l_3 - \Omega)}.$$

Эти формулы представляемъ въ такомъ видѣ:

$$tg\, i \sin(l_1 - \Omega) = tg\, b_1$$
$$tg\, i \sin(l_3 - \Omega) = tg\, b_3.$$

Чтобы по этимъ формуламъ можно было опредѣлить i и Ω, преобразуемъ нѣсколько вторую формулу.

Мы можемъ написать

$$l_3 - \Omega = l_3 - l_1 + (l_1 - \Omega).$$

Тогда вторая формула дастъ:

$$tg\, i \cos(l_1 - \Omega) \sin(l_3 - l_1) + tg\, i \sin(l_1 - \Omega) \cos(l_3 - l_1) = tg\, b_3.$$

Замѣняя $tg\, i \sin(l_1 - \Omega)$ его выраженіемъ $tg\, b_1$, находимъ:

$$tg\, i \cos(l_1 - \Omega) \sin(l_3 - l_1) = tg\, b_3 - tg\, b_1 \cos(l_3 - l_1).$$

Окончательно для опредѣленія i и Ω будемъ имѣть такія формулы:

$$tg\, i \sin(l_1 - \Omega) = tg\, b_1$$

$$tg\, i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{tg\, b_3 - tg\, b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}.$$

Такъ какъ мы уже знаемъ, что въ случаѣ прямого движенія кометы, т. е. при $l_3 - l_1 > 0$, уголъ i заключается въ предѣлахъ отъ $0°$ до $90°$, а въ случаѣ обратнаго движенія, т. е. при $l_3 - l_1 < 0$, уголъ i долженъ лежать во второй четверти, то предыдущія формулы безъ всякой двойственности опредѣляютъ углы i и Ω.

Вычисливъ элементы i и Ω, мы по формуламъ (176) опредѣлимъ аргументы широты u_1 и u_3, которые намъ понадобятся впослѣдствіи. Впрочемъ изъ формулъ (176) легко получаются другія, болѣе удобныя формулы, а именно:

$$tg\, u_1 = \frac{tg(l_1 - \Omega)}{\cos i} \quad \text{и} \quad tg\, u_3 = \frac{tg(l_3 - \Omega)}{\cos i}.$$

По этимъ формуламъ вычисленія производятся въ тѣхъ случаяхъ, когда $0° < i < 45°$ или $135° < i < 180°$. Въ остальныхъ случаяхъ болѣе точный результатъ дадутъ также легко выводимыя слѣдующія формулы:

$$tg\, u_1 = \frac{tg\, b_1}{\sin i \cos(l_1 - \Omega)} \quad \text{и} \quad tg\, b_3 = \frac{tg\, b_3}{\sin i \cos(l_3 - \Omega)}.$$

При этомъ надо имѣть въ виду, что $0° < u < 180°$ при $b > 0°$ и $180° < u < 360°$ при $b < 0°$.

Зная u_1 и u_3 и замѣчая, что $u_3 - u_1 = v_3 - v_1$, мы можемъ имѣть контроль предшествующихъ вычисленій. Въ самомъ дѣлѣ, основываясь на этомъ замѣчаніи, мы можемъ изъ треугольника SC_1C_3 (рис. 35), вершинами котораго служатъ солнце и первое и третье положенія кометы, выразить $tg\, \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$ въ зависимости отъ r_1, r_3 и s, а именно:

$$tg\, \frac{1}{2}(u_3 - u_1) = \sqrt{\frac{(\Sigma - r_1)(\Sigma - r_3)}{\Sigma(\Sigma - s)}},$$

гдѣ

$$\Sigma = \frac{1}{2}(r_1 + r_3 + s).$$

При подстановкѣ въ это уравненіе вмѣсто s, r_1, r_3 и $u_3 - u_1$ величинъ, найденныхъ для нихъ при помощи предыдущихъ вычисленій, это уравненіе должно удовлетвориться, что и является контролемъ вѣрности вычисленій.

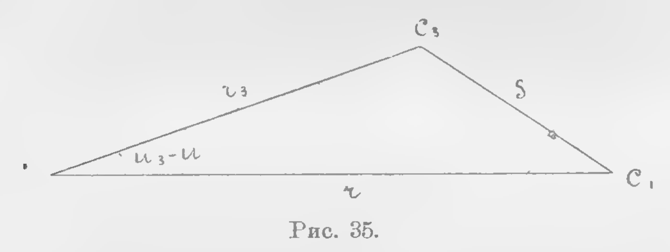


Рис. 35.

Далѣе, обращаемся къ уравненію параболы въ полярныхъ координатахъ и примѣнимъ его къ первому и третьему моментамъ:

$$r_1 = \frac{q}{\cos^2 \frac{v_1}{2}} \quad \text{и} \quad r_3 = \frac{q}{\cos^2 \frac{v_3}{2}}.$$

Отсюда получаемъ:

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{r_3}}.$$

Чтобы избѣжать двойственности знака, мы можемъ условиться считать v отъ $0°$ до $+180°$ въ одну сторону отъ перигелія и отъ $0°$ до $-180°$ въ другую сторону. Предыдущія уравненія могутъ служить для опредѣленія q и v_1, но для этого, пользуясь соотношеніемъ $v_3 = v_1 + (u_3 - u_1)$, мы должны нѣсколько преобразовать второе уравненіе, а именно:

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v_1 \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1) - \frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{1}{2} v_1 \sin \frac{1}{2}(u_3 - u_1) = \frac{1}{\sqrt{r_3}},$$

или, замѣняя $\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v_1$ его выраженіемъ $\frac{1}{\sqrt{r_1}}$, находимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{1}{2} v_1 \sin \frac{1}{2}(u_3 - u_1) = \frac{1}{\sqrt{r_1}} \cos \frac{1}{2}(u_3 - u_1) - \frac{1}{\sqrt{r_3}}.$$

Окончательно для опредѣленія истинной аномаліи v_1 и разстоянія

перигелія отъ солнца q получаемъ слѣдующія формулы:

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{\sqrt{r_1}} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(u_3 - u_1) - \frac{1}{\sqrt{r_3}} \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(u_3 - u_1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{\sqrt{r_1}}.$$

При опредѣленіи v_1 по этимъ формуламъ надо помнить, что $-90^\circ < \frac{1}{2} v_1 < +90^\circ$. Зная v_1, мы легко находимъ разстояніе ω перигелія отъ узла, такъ какъ

$$u_1 = v_1 + \omega$$

и слѣдовательно

$$\omega = u_1 - v_1.$$

Если мы хотимъ опредѣлить долготу перигелія π, то для этого служитъ формула:

$$\pi = u_1 - v_1 + \Omega.$$

Найдя v_1, легко вычислимъ также v_3 по формулѣ:

$$v_3 = u_3 - \omega.$$

Теперь намъ остается опредѣлить послѣдній элементъ T, который представляетъ время прохожденія кометы черезъ перигелій. Для этого воспользуемся уравненіемъ, связывающимъ истинную аномалію съ временемъ t, а именно:

$$\frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = tg \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} tg^3 \frac{1}{2} v.$$

Назовемъ правую часть этого уравненія одной буквой M, такъ что

$$M = tg \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} tg^3 \frac{1}{2} v.$$

Примѣняя уравненіе

$$\frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = M$$

къ первому и третьему моментамъ, получаемъ:

$$\frac{k(t_1 - T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = M_1 \quad \text{и} \quad \frac{k(t_3 - T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = M_3.$$

Отсюда для T находимъ двѣ величины:

$$T = t_1 - \frac{\sqrt{2}}{k} M_1 q^{\frac{3}{2}} \quad \text{и} \quad T = t_3 - \frac{\sqrt{2}}{k} M_3 q^{\frac{3}{2}}.$$

Согласіе значеній T, полученныхъ по этимъ двумъ формуламъ, является контролемъ произведенныхъ вычисленій. Однако полнаго согласія обыкновенно не бываетъ, и если эти двѣ величины T будутъ нѣсколько отличаться другъ отъ друга, то окончательно слѣдуетъ взять среднее ариѳметическое изъ нихъ.

Итакъ, мы опредѣлили всѣ пять элементовъ параболической орбиты: i, ☊, ω, q, T.

§ 55. Представленіе полученными элементами положеній кометы.

Вычисливши изъ наблюденій элементы параболической орбиты, необходимо обратно по этимъ элементамъ вычислить положенія кометы для моментовъ t_1, t_2 и t_3. Это явится окончательною провѣркой произведенныхъ нами вычисленій. Для настоящей цѣли служатъ формулы, которыя мы вывели въ главѣ, трактующей о вычисленіи эфемериды небеснаго тѣла. Здѣсь мы придадимъ имъ нѣсколько иной видъ.

Итакъ, мы должны считать извѣстными элементы i, ☊, ω, q, T. Прежде всего для даннаго момента t мы вычисляемъ истинную аномалію v изъ уравненія:

$$\frac{k(t - T)}{q^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}} = tg \frac{v}{2} + \frac{1}{3} tg^3 \frac{v}{2}.$$

Вычисливъ истинную аномалію, радіусъ-векторъ найдемъ по формулѣ:

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}}.$$

Затѣмъ опредѣляемъ аргументъ широты, пользуясь соотношеніемъ:

$$u = v + \omega.$$

Послѣ этого находимъ геліоцентрическія широту b и долготу l на основаніи формулъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos b \cos (l - ☊) &= \cos u \\ \cos b \sin (l - ☊) &= \sin u \cos i \\ \sin b &= \sin u \sin i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (177)$$

Наконецъ, если углы въ плоскости эклиптики считать отъ линіи узловъ плоскости орбиты по отношенію къ плоскости эклиптики, то для

вычисленія полярныхъ геоцентрическихъ эклиптикальныхъ координатъ будемъ имѣть слѣдующія формулы:

$$\rho \cos\beta \cos(\lambda - \Omega) = r \cos b \cos(l - \Omega) + R \cos(L - \Omega)$$
$$\rho \cos\beta \sin(\lambda - \Omega) = r \cos b \sin(l - \Omega) + R \sin(L - \Omega)$$
$$\rho \sin\beta = r \sin b.$$

Впрочемъ l и b мы можемъ исключить изъ этихъ уравненій при помощи формулъ (177). Тогда получимъ:

$$\rho \cos\beta \cos(\lambda - \Omega) = r \cos u + R \cos(L - \Omega)$$
$$\rho \cos\beta \sin(\lambda - \Omega) = r \sin u \cos i + R \sin(L - \Omega)$$
$$\rho \sin\beta = r \sin u \sin i.$$

Итакъ, прежде всего мы вычисляемъ v и r, затѣмъ находимъ u, а послѣ этого прямо опредѣляемъ ρ, β и λ. Если буквами β_c и λ_c назовемъ вычисленныя широту и долготу, а буквами β_0 и λ_0 наблюденныя, то разности $\beta_0 - \beta_c$ и $\lambda_0 - \lambda_c$ и дадутъ намъ понятіе о точности произведенныхъ вычисленій. Замѣтимъ, что обыкновенно разность $\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda$ умножается на $\cos\beta_c$, такъ какъ черезъ дифференцированіе предыдущихъ уравненій въ зависимости отъ ошибокъ элементовъ получается именно величина $\Delta\lambda \cos\beta$.

Относительно представленія второго положенія небеснаго тѣла найденными нами элементами необходимо замѣтить слѣдующее. При вычисленіяхъ мы не употребляли самихъ координатъ λ_2, β_2 небеснаго тѣла, а только уголъ J_2, опредѣляемый уравненіемъ:

$$tg\, J_2 = \frac{tg\,\beta_2}{\sin(\lambda_2 - L_2)} \quad \dots\dots\dots \quad (178)$$

Поэтому при представленіи второго наблюденія мы можемъ требовать только совпаденія значеній J_2, получаемыхъ изъ наблюденныхъ и изъ вычисленныхъ по элементамъ значеній λ_2, β_2. Дифференцируя формулу (178), замѣняя дифференціалы конечными разностями и полагая $\Delta J_2 = 0$, приходимъ къ заключенію, что во всякомъ случаѣ мы должны считать представленіе второго мѣста удовлетворительнымъ, если выполнено условіе:

$$tg(\lambda_2 - L_2)\,.\,\Delta\beta_2 = \frac{1}{2}\sin 2\beta_2\,.\,\Delta\lambda_2 \quad \dots\dots \quad (179)$$

Въ томъ случаѣ, когда при полученныхъ нами $\Delta\lambda_2$, $\Delta\beta_2$ правая и лѣвая части равенства (179) значительно отличаются другъ отъ друга и когда мы можемъ ручаться за отсутствіе ошибки въ вычисленіяхъ или наблюденіяхъ, слѣдуетъ заключить, что данное небесное тѣло движется по орбитѣ, отличной отъ параболы.

Что касается до представленія перваго и третьяго наблюденій, то въ предѣлахъ точности логариѳмическихъ вычисленій оно должно быть вполнѣ строгимъ: при пользованіи шестизначными таблицами разности $\Delta\lambda \cos\beta$ и $\Delta\beta$ не должны превышать $1'',0$.

§ 56. Вычисленіе геоцентрическихъ разстояній послѣдовательными приближеніями.

Занимаясь въ § 48 опредѣленіемъ коэффиціентовъ основного уравненія:

$$\rho_3 = M\rho_1 + m,$$

мы брали отношенія площадей треугольниковъ при вычисленіи коэффиціента M съ точностью до величинъ перваго порядка, а при вычисленіи коэффиціента m съ точностью до величинъ второго порядка, вслѣдствіе чего мы могли символъ $☄_1$ замѣнить символомъ $⊙_2$, и тогда, принимая $\Pi_2 = L_2$, мы достигали значительнаго упрощенія, такъ какъ коэффиціентъ m обращался въ нуль. Очевидно, что полученныя въ первомъ приближеніи при этихъ условіяхъ геоцентрическія разстоянія мы не можемъ считать вполнѣ точными. Поэтому необходимо продѣлать второе приближеніе, употребляя при вычисленіи коэффиціентовъ M и m болѣе точныя значенія для отношеній площадей треугольниковъ.

И во второмъ приближеніи мы опять будемъ принимать $\Pi_2 = L_2$, вслѣдствіе чего на основаніи соотношеній (163) будетъ $☄_2 = 0$. Поэтому, вводя для краткости обозначенія:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_2]} = \frac{n_1}{n_3} \quad \text{и} \quad \frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_2]} = \frac{N_1}{N_3},$$

мы, на основаніи формулъ (155), будемъ имѣть для коэффиціентовъ m и M слѣдующія выраженія:

$$m = \frac{\sin J_2}{☄_3}\left[\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3}\right] R_1 \sin(L_1 - L_2)$$

$$M = \frac{n_1}{n_3} \cdot \frac{☄_1}{☄_3}.$$

Замѣняя символы $☄_1$ и $☄_3$ ихъ выраженіями, данными въ § 48, мы представимъ коэффиціенты m и M въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1)}{\sin(\lambda_3 - L_2)\cos\beta_3 - \sin\beta_3 \operatorname{cotg} J_2}\left[\frac{N_1}{N_3} - \frac{n_1}{n_3}\right] \\ M &= \frac{n_1}{n_3} \cdot \frac{\sin\beta_1 \operatorname{cotg} J_2 - \sin(\lambda_1 - L_2)\cos\beta_1}{\sin(\lambda_3 - L_2)\cos\beta_3 - \sin\beta_3 \operatorname{cotg} J_2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (180)$$

Отношеніе площадей треугольниковъ $\frac{N_1}{N_3}$, образованныхъ радіусами-век-

торами земли, мы можемъ безъ всякаго труда опредѣлить по вполнѣ точной формулѣ:

$$\frac{N_1}{N_3} = \frac{[R_2\ R_3]}{[R_1\ R_2]} = \frac{R_2\, R_3\, sin\,(L_3 - L_2)}{R_1\, R_2\, sin\,(L_2 - L_1)} = \frac{R_3\ sin\,(L_3 - L_2)}{R_1\ sin\,(L_2 - L_1)}.$$

Обращаемся теперь къ опредѣленію во второмъ приближеніи отношенія площадей треугольниковъ $\frac{n_1}{n_3}$, образованныхъ радіусами-векторами небеснаго тѣла.

Съ этою цѣлью мы могли бы воспользоваться разложеніями отношеній площадей треугольниковъ въ ряды. Практичнѣе однако воспользоваться другимъ методомъ. Именно, слѣдуя статьѣ Энке, напечатанной въ ежегодникѣ «Berliner Astronomisches Jahrbuch» за 1833 годъ, введемъ въ разсмотрѣніе отношеніе площади параболическаго сектора (rr'), описаннаго радіусомъ-векторомъ небеснаго тѣла за время $(t'—t)$, къ площади соотвѣтствующаго треугольника $[rr']$; назовемъ это отношеніе буквой y, такъ что

$$y = \frac{(rr')}{[rr']}.$$

Если бы намъ удалось выразить y черезъ извѣстныя намъ величины, то этимъ самымъ наша задача была бы рѣшена, такъ какъ отношенія площадей секторовъ намъ всегда извѣстны: они равны, на основаніи перваго закона Кеплера, отношеніямъ соотвѣтствующихъ промежутковъ времени.

За извѣстныя величины мы будемъ принимать радіусы-векторы r и r'.

На основаніи соображеній, развитыхъ въ началѣ курса, мы имѣемъ для удвоенной площади параболическаго сектора такое выраженіе:

$$2\,(rr') = k\sqrt{2q}\ (t' - t).$$

При этомъ мы пренебрегли массою небеснаго тѣла, такъ какъ всѣ вновь открываемыя небесныя тѣла обладаютъ ничтожными массами.

Съ другой стороны мы имѣемъ:

$$2\ [rr'] = rr'\ sin\,(v' - v).$$

Поэтому

$$y = \frac{k\sqrt{2q}\ (t' - t)}{rr'\ sin\,(v' - v)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (181)$$

Присоединимъ къ этому уравненію на основаніи извѣстныхъ свойствъ параболическаго движенія еще слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} r = \frac{q}{cos^2\frac{1}{2}v}, &\quad r' = \frac{q}{cos^2\frac{1}{2}v'} \\ s^2 = r^2 + r'^2 &- 2rr'\ cos\,(v' - v) \\ 6k\,(t' - t) = (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} &- (r + r' - s)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right\} \ldots (182)$$

Тогда мы будемъ имѣть систему пяти уравненій (181) и (182) съ пятью неизвѣстными величинами y, q, v, v' и s.

Вводя вмѣсто v и v' другія неизвѣстныя F и f при помощи соотношеній

$$F = \frac{1}{2}(v' + v) \quad \text{и} \quad f = \frac{1}{2}(v' - v),$$

мы вмѣсто предыдущихъ уравненій будемъ имѣть слѣдующую систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{k\sqrt{2q}\,(t' - t)}{rr' \sin 2f} \\ \cos\frac{1}{2}(F - f) &= \sqrt{\frac{q}{r}} \\ \cos\frac{1}{2}(F + f) &= \sqrt{\frac{q}{r'}} \\ s^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos 2f \\ 6k(t' - t) &= (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} - (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}\right\} \dots (183)$$

съ пятью неизвѣстными величинами y, q, F, f и s.

Такъ какъ сейчасъ насъ интересуетъ неизвѣстная y, то постараемся изъ уравненій (183) исключить остальныя четыре неизвѣстныя.

Исключимъ прежде всего величину F. Почленно сначала складывая и затѣмъ умножая второе и третье уравненія системы (183), получаемъ:

$$2\cos\frac{1}{2}F\cos\frac{1}{2}f = \sqrt{\frac{q}{r}} + \sqrt{\frac{q}{r'}} = \sqrt{q}\,\frac{\sqrt{r} + \sqrt{r'}}{\sqrt{rr'}} \dots (184)$$

и

$$\cos F + \cos f = 2\sqrt{\frac{q}{r}}\sqrt{\frac{q}{r'}}.$$

Послѣднее уравненіе можно представить въ видѣ:

$$2\cos^2\frac{1}{2}F - 1 + \cos f = \frac{2q}{\sqrt{rr'}} \dots\dots\dots (185)$$

Подставляя значеніе для $\cos\frac{1}{2}F$ изъ (184) въ (185), послѣ несложныхъ выкладокъ получаемъ:

$$q = \frac{rr' \sin^2 f}{r + r' - 2\sqrt{rr'}\cos f}.$$

Это уравненіе замѣняетъ второе и третье уравненія системы (183). Если мы найденное выраженіе для q подставимъ въ формулу для y, то мы исключимъ изъ системы (183) также и величину q.

Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующую систему трехъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{k(t'-t)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cos f\sqrt{rr'}\sqrt{r+r'-2\cos f\sqrt{rr'}}} \\ s^2 &= (r+r')^2 - 4rr'\cos^2 f \\ 6k(t'-t) &= (r+r'+s)^{\frac{3}{2}} - (r+r'-s)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (186)$$

съ тремя неизвѣстными величинами y, f и s.

Теперь намъ предстоитъ исключить f и s изъ системы уравненій (186).

Исключить f было бы довольно просто: достаточно значеніе для $\cos f$, вытекающее изъ второго уравненія системы (186), подставить въ первое. Непосредственное же исключеніе s невозможно, такъ какъ третье уравненіе системы (186) есть уравненіе Эйлера-Ламберта, непосредственно неразрѣшимое относительно s. Воспользуемся поэтому указаннымъ въ § 50 искусственнымъ методомъ рѣшенія уравненія Эйлера-Ламберта. Именно, тамъ было показано, что если положить

$$s = (r+r')\sin 2\gamma, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (187)$$

то для опредѣленія γ служатъ формулы:

$$\sin\gamma = \sqrt{2}\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (188)$$

$$\sin 3\theta = \frac{6k(t'-t)}{2^{\frac{3}{2}}(r+r')^{\frac{3}{2}}}$$

или

$$\sin 3\theta = \frac{3\eta}{2^{\frac{3}{2}}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (189)$$

гдѣ

$$\eta = \frac{2k(t'-t)}{(r+r')^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (190)$$

Такимъ образомъ третье изъ уравненій системы (186) можно замѣнить формулой (187), гдѣ уголъ γ мы можемъ считать величиной извѣстной. Подставимъ же вмѣсто s его выраженіе (187) во второе изъ уравненій системы (186). Получаемъ:

$$(r+r')^2\sin^2 2\gamma = (r+r')^2 - 4rr'\cos^2 f$$

или

$$(r+r')^2\cos^2 2\gamma = 4rr'\cos^2 f,$$

откуда

$$\cos f\sqrt{rr'} = \frac{1}{2}(r+r')\cos 2\gamma.$$

Внося этотъ результатъ въ первое изъ уравненій системы (186),

получаемъ послѣ нѣкоторыхъ выкладокъ:

$$y = \frac{\eta}{2\cos 2\gamma \sin\gamma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (191)$$

Итакъ, исключеніе неизвѣстныхъ f и s изъ системы уравненій (186) привело насъ къ уравненію (191) для неизвѣстной y; входящіе въ него вспомогательныя величины опредѣляются по формуламъ (190), (189) и (188).

Изъ разсмотрѣнія всѣхъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что можно составить готовую таблицу, которая давала бы значеніе y непосредственно по аргументу:

$$\eta = \frac{2k(t'-t))}{(r+r')^{\frac{3}{2}}}.$$

Такая таблица приложена въ концѣ книги (см. табл. II).

Такимъ образомъ, приступая ко второму приближенію, мы должны вычислить отношеніе $\frac{n_1}{n_3}$ площадей треугольниковъ по формулѣ:

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3}\frac{y_3}{y_1},$$

причемъ y_1 пріискивается по аргументу

$$\eta_1 = \frac{2\tau_1}{(r_2+r_3)^{\frac{3}{2}}}$$

и y_3 по аргументу

$$\eta_3 = \frac{2\tau_3}{(r_1+r_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Слѣдовательно, для вычисленія $\frac{n_1}{n_3}$ намъ необходимо имѣть значенія r_1, r_2 и r_3. Значенія r_1 и r_3 у насъ уже были найдены въ первомъ приближеніи вмѣстѣ съ геоцентрическими разстояніями ρ_1 и ρ_3. Обратимся къ опредѣленію значенія r_2. Разложимъ величину r^2 въ рядъ по степенямъ промежутка времени $(t-t_2)$; значеніе r^2 для начальнаго момента t_2 есть r_2^2. Пользуясь строкой Маклорена, имѣемъ:

$$r^2 = r_2^2 + \frac{dr_2^2}{dt}(t-t_2) + \frac{d^2r_2^2}{dt^2}\frac{(t-t_2)^2}{1\,.\,2} + \ldots$$

Примѣняя эту формулу одинъ разъ къ моменту t_1, а другой разъ къ моменту t_3, пренебрегая при этомъ малыми величинами третьяго порядка и переходя къ перемѣнной τ, находимъ:

$$r_1^2 = r_2^2 - \tau_3\frac{dr_2^2}{d\tau} + \frac{\tau_3^2}{1\,.\,2}\frac{d^2r_2^2}{d\tau^2}$$

$$r_3^2 = r_2^2 + \tau_1\frac{dr_2^2}{d\tau} + \frac{\tau_1^2}{1\,.\,2}\frac{d^2r^2_2}{d\tau^2}.$$

Отсюда

$$\tau_1 r_1{}^2 + \tau_3 r_3{}^2 = \tau_2 r_2{}^2 + \frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{2}\frac{d^2 r_2{}^2}{d\tau^2}$$

Для вычисленія $\frac{d^2r^2}{d\tau^2}$ обратимся къ уравненію параболы:

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}$$

Изъ него выводимъ:

$$r^2 = \frac{q^2}{\cos^4 \frac{1}{2} v}.$$

Дифференцируя, получаемъ:

$$\frac{dr^2}{d\tau} = 2q^2 \frac{\sin \frac{1}{2} v}{\cos^5 \frac{1}{2} v}\frac{dv}{d\tau}.$$

Но на основаніи интеграла площадей мы имѣемъ:

$$r^2 \frac{dv}{d\tau} = \sqrt{2q}.$$

откуда:

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\sqrt{2q}}{r^2} = \frac{\sqrt{2q}}{q^2}\cos^4 \frac{1}{2} v.$$

Поэтому

$$\frac{dr^2}{d\tau} = 2\sqrt{2q}\, tg\, \frac{1}{2} v.$$

Далѣе

$$\frac{d^2r^2}{d\tau^2} = \frac{\sqrt{2q}}{\cos^2 \frac{1}{2} v}\frac{dv}{d\tau} = \frac{2}{q}\cos^2 \frac{1}{2} v$$

или

$$\frac{d^2r^2}{d\tau^2} = \frac{2}{r}.$$

Слѣдовательно окончательно можемъ принять:

$$\frac{d^2r_2{}^2}{d\tau^2} = \frac{2}{r_2}$$

и

$$\tau_1 r_1{}^2 + \tau_3 r_3{}^2 = \tau_2 r_2{}^2 + \frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{r_2}.$$

Изъ этого уравненія и опредѣлится r_2 съ удовлетворительною для нашихъ цѣлей точностью, причемъ рѣшать это уравненіе надо по способу последовательныхъ гипотезъ.

Въ предыдущемъ изложеніи мы имѣемъ всѣ формулы, необходимыя для вычисленія коэффиціентовъ M и m во второмъ приближеніи, при-

чемъ коэффиціентъ m отличенъ отъ нуля, такъ что уравненіе, связывающее между собою ρ_3 и ρ_1, будетъ таково:

$$\rho_3 = M\rho_1 + m.$$

Впрочемъ это уравненіе можетъ быть переписано еще слѣдующимъ образомъ:

$$\rho_3 = (M)\,\rho_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (192)$$

гдѣ

$$(M) = M + \frac{m}{\rho_1}.$$

Входящее сюда значеніе ρ_1 мы возьмемъ изъ перваго приближенія. Такимъ образомъ во второмъ приближеніи основное уравненіе (192) можетъ быть представлено въ такомъ же видѣ, какъ и уравненіе Ольберса въ первомъ приближеніи.

Сдѣлавши второе приближеніе, мы такимъ же образомъ можемъ сдѣлать третье и т. д. до тѣхъ поръ, пока значенія для $\frac{n_1}{n_3}$, полученныя въ двухъ послѣдовательныхъ приближеніяхъ, не совпадутъ между собою. Тогда найденныя нами значенія ρ_1 и ρ_3 будутъ окончательными, послѣ чего приступаемъ къ опредѣленію элементовъ орбиты. Въ большинствѣ случаевъ оказывается достаточнымъ двухъ приближеній.

Замѣтимъ еще слѣдующее. Приступая ко второму приближенію, мы должны исправить моменты t за аберрацію, иначе говоря—должны вычесть изъ нихъ аберраціонныя времена Δt, причемъ

$$\Delta t = [7{,}7612]\,\rho.$$

Для этого намъ необходимо имѣть значенія ρ_1, ρ_2 и ρ_3. Значенія ρ_1 и ρ_3 мы возьмемъ изъ перваго приближенія.

Для опредѣленія же значенія ρ_2 предположимъ измѣненія ρ пропорціональными времени, такъ что:

$$\rho_1 = \rho_2 - \tau_3 \frac{d\rho_2}{d\tau}$$

$$\rho_3 = \rho_2 + \tau_1 \frac{d\rho_2}{d\tau}.$$

Отсюда

$$\tau_1\rho_1 + \tau_3\rho_3 = \tau_2\rho_2.$$

Изъ этого уравненія и опредѣлится ρ_2 съ удовлетворительною для нашей цѣли точностью.

§ 57. Сводка формулъ, необходимыхъ для опредѣленія параболической орбиты по тремъ наблюденіямъ.

При первомъ опредѣленіи параболической орбиты пользуются обыкновенно наблюденіями, отдѣленными другъ отъ друга промежутками вре-

мени отъ 2 до 10 дней. Промежутки времени вообще берутся тѣмъ большими, чѣмъ меньше геоцентрическое движеніе небеснаго тѣла. Для достиженія бо́льшей точности въ первомъ же приближеніи рекомендуется стремиться къ тому, чтобы промежутокъ времени между первымъ и вторымъ наблюденіями былъ по возможности равенъ промежутку времени между вторымъ и третьимъ наблюденіями, напр., съ точностью до одного или двухъ часовъ.

Приведемъ теперь всѣ формулы, необходимыя для перваго опредѣленія параболической орбиты по тремъ наблюденіямъ. При этомъ будемъ пользоваться ежегодникомъ «Berliner Astronomisches Jahrbuch».

Подготовка наблюденій.

I. Моменты наблюденій небеснаго тѣла приводимъ къ берлинскому меридіану, зная долготы мѣстъ наблюденій относительно Берлина, и затѣмъ выражаемъ эти моменты въ доляхъ сутокъ; для этого можно воспользоваться таблицей, помѣщенной въ книгѣ «А. А. Ивановъ. Курсъ Сферической Астрономіи». СПБ. 1911, стр. 294.

II. Для полученныхъ такимъ образомъ моментовъ t_1, t_2 и t_3 съ помощью ежегодника опредѣляемъ по формуламъ интерполированія логариѳмы разстоянія R солнца отъ земли и его геоцентрическія долготы L. Интерполированіе удобнѣе всего производить по формулѣ Бесселя:

$$f(t) = f(t_0) + n f_1\left(t_0 + \frac{1}{2}\omega\right) + \frac{1}{2} n(n-1) f_2\left(t_0 + \frac{1}{2}\omega\right).$$

Въ данномъ случаѣ промежутокъ ω равенъ однѣмъ суткамъ и $n = t - t_0$. Значеніе коэффиціента $\frac{1}{2} n(n-1)$ можно взять готовымъ изъ таблицы I, приложенной въ концѣ этой книги. Необходимо помнить, что

$$f_2\left(t_0 + \frac{1}{2}\omega\right) = \frac{1}{2}\left[f_2(t_0) + f_2(t_0 + \omega)\right].$$

Значенія L выписываются и интерполируются съ точностью до $0'',1$, а значенія $\log R$ съ точностью до 0,000001.

III. Изъ полученныхъ изъ наблюденій экваторіальныхъ координатъ α и δ небеснаго тѣла *вычитаемъ* поправки:

$$\Delta\alpha = f + g \sin(G+\alpha)\, tg\,\delta + h \sin(H+\alpha) \sec\delta$$
$$\Delta\delta = g \cos(G+\alpha) + h \cos(H+\alpha) \sin\delta + i \cos\delta.$$

При этомъ значенія f, $\log g$, G, $\log h$, H и $\log i$ выписываемъ непосредственно изъ ежегодника. Вычисленія производятся съ помощью четырехзначныхъ логариѳмовъ.

Исправленныя такимъ образомъ координаты будемъ попрежнему обозначать буквами α и δ.

IV. Обращаемъ экваторіальныя координаты α и δ въ эклиптикальныя координаты λ, β. Вычисленія производятся помощью шестизначныхъ логариѳмовъ по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} n \sin N &= \sin \delta \\ n \cos N &= \cos \delta \sin \alpha \end{aligned}\right\} n > 0$$

$$\cos \beta \sin \lambda = n \cos (N - \varepsilon)$$

$$\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha$$

$$\sin \beta = n \sin (N - \varepsilon).$$

Здѣсь ε обозначаетъ среднюю наклонность эклиптики къ экватору для начала года; ея значеніе можно взять изъ ежегодника

Для контроля вычисленій служатъ формулы:

$$\sin (\lambda - \alpha) = 2 n \sin \tfrac{1}{2} \varepsilon \cos \alpha \sec \beta \sin \left(N - \tfrac{1}{2} \varepsilon\right)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} (\delta - \beta) = n \sin \tfrac{1}{2} \varepsilon \sec \tfrac{1}{2} (\delta + \beta) \cos \left(N - \tfrac{1}{2} \varepsilon\right).$$

Вычисленіе вспомогательныхъ величинъ.

Вычисленія производится при помощи шестизначныхъ логариѳмовъ.

V.
$$tg J_2 = \frac{tg \beta_2}{\sin (\lambda_2 - L_2)}.$$

VI.
$$Z_1 = \sin \beta_1 \, cotg J_2 - \cos \beta_1 \sin (\lambda_1 - L_2)$$

$$Z_3 = \cos \beta_3 \sin (\lambda_3 - L_2) - \sin \beta_3 \, cotg J_2.$$

VII.
$$\left.\begin{aligned} g \sin G &= R_3 \sin (L_3 - L_2) - R_1 \sin (L_1 - L_2) \\ g \cos G &= R_3 \cos (L_3 - L_2) - R_1 \cos (L_1 - L_2) \end{aligned}\right\} g > 0.$$

VIII.
$$\cos \psi_1 = \cos \beta_1 \cos (\lambda_1 - L_1); \ \sin \psi_1 > 0$$

$$\cos \psi_3 = \cos \beta_3 \cos (\lambda_3 - L_3); \ \sin \psi_3 > 0.$$

$$f_1 = R_1 \cos \psi_1 \text{ и } l_1 = R_1 \sin \psi_1$$

$$f'_3 = R_3 \cos \psi_3 \text{ и } l'_3 = R_3 \sin \psi_3.$$

Первое приближеніе.

Вычисленія производятся помощью пятизначныхъ логариѳмовъ.

IX.

$$\tau_1 = k\,(t_3 - t_2)$$
$$\tau_2 = k\,(t_3 - t_1)$$
$$\tau_3 = k\,(t_2 - t_1)$$
$$\log k = 8{,}23558.$$

Контроль: $\tau_2 = \tau_1 + \tau_3$.

X.

$$M = \frac{\tau_1 Z_1}{\tau_3 Z_3}.$$

XI.

$$h\cos\zeta\sin H = M\cos\beta_3\sin(\lambda_3 - L_2) - \cos\beta_1\sin(\lambda_1 - L_2)$$
$$h\cos\zeta\cos H = M\cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_2) - \cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_2)$$
$$h\sin\zeta = M\sin\beta_3 - \sin\beta_1,$$

причемъ

$$h > 0 \quad \text{и} \quad -90^\circ < \zeta < +90^\circ.$$

Далѣе

$$\cos\varphi = \cos\zeta\cos(G - H);\ \sin\varphi > 0$$

$$f = g\cos\varphi \qquad f_3 = \frac{f'_3}{M}$$

$$l = (g\sin\varphi)^2 \qquad l_3 = \frac{l'_3}{M}.$$

XII. Обращаемся теперь къ опредѣленію ρ_1 и ρ_3 послѣдовательными *гипотезами*. Вычисленія производятся по формуламъ:

$$\sigma_0 = r_1 + r_3$$

$$\sin 3\theta = \frac{6}{2^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\tau_2}{\sigma_0^{\frac{3}{2}}} = [0{,}32661]\,\frac{\tau_2}{\sigma_0^{\frac{3}{2}}};\quad 0^\circ < 3\theta < 90^\circ$$

$$\sin\gamma = \sqrt{2}\sin\theta = [0{,}15052]\sin\theta;\quad 0^\circ < \gamma < 45^\circ$$

$$s = \sigma_0\sin 2\gamma$$

$$\rho_1 = \frac{1}{h}\left(f + \sqrt{s^2 - l}\right)$$

$$tg\theta_1 = \frac{\rho_1 - f_1}{l_1}$$

$$tg\theta_3 = \frac{\rho_1 - f_3}{l_3}$$

$$r_1 = l_1 \sec\theta_1$$

$$r_3 = l'_3 \sec\theta_3$$

$$f(\sigma_0) = r_1 + r_3$$

$$f'(\sigma_0) = -2\sigma_0 (\sin\theta_1 + M \sin\theta_3) \frac{\sin^2\gamma}{h\sqrt{s^2 - l}}$$

$$\Delta\sigma_0 = \frac{f(\sigma_0) - \sigma_0}{1 - f'(\sigma_0)}$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + \Delta\sigma_0.$$

Въ первой гипотезѣ принимаемъ $\sigma_0 = 2$. Во второй гипотезѣ вмѣсто σ_0 беремъ значеніе σ_1, полученное въ концѣ первой гипотезы, и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получимъ $f(\sigma_0) = \sigma_0$. Тогда значенія для ρ_1, r_1 и r_3 будутъ окончательными. Послѣ этого имѣемъ:

$$\rho_3 = M\rho_1.$$

Замѣтимъ, что $f'(\sigma_0)$ и $\Delta\sigma_0$ вычисляются при помощи четырехзначныхъ логариѳмовъ.

Второе приближеніе.

XIII. Опредѣляемъ ρ_2 изъ уравненія:

$$\tau_1\rho_1 + \tau_3\rho_3 = \tau_2\rho_2,$$

послѣ чего *вычитаемъ* изъ моментовъ наблюденій аберраціонныя времена

$$\Delta t = [7{,}7612]\,\rho.$$

Вычисленія производятся при помощи четырехзначныхъ логариѳмовъ. Исправленные такимъ образомъ моменты будемъ попрежнему обозначать буквами t со значками.

Повторяемъ вычисленія указанныя въ IX, но съ шестизначными логариѳмами, причемъ $\log k = 8{,}235581$.

XIV. Опредѣляемъ r_2 изъ уравненія:

$$\tau_1 r_1^2 + \tau_3 r_3^2 = \tau_2 r_2^2 + \frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{r_2}.$$

Это опредѣленіе выполняется двумя гипотезами. Именно предварительно вычисляемъ выраженіе:

$$S = \tau_1 r_1^2 + \tau_3 r_3^2.$$

Далѣе въ первой гипотезѣ опредѣляемъ r_2 изъ уравненія:

$$\tau_2 r_2^2 = S,$$

а во второй гипотезѣ опредѣляемъ r_2 изъ уравненія:

$$\tau_2 r_2{}^2 = S - \frac{\tau_1\tau_2\tau_3}{r_2},$$

причемъ въ правой части для r_2 беремъ его значеніе, найденное въ первой гипотезѣ.

XV. Вычисляемъ помощью пятизначныхъ логариѳмовъ значенія величинъ:

$$\eta_1 = \frac{2\tau_1}{(r_2 + r_3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\eta_3 = \frac{2\tau_3}{(r_1 + r_2)^{\frac{3}{2}}}$$

и съ ними пріискиваемъ шестизначные логариѳмы величинъ y_1 и y_3 изъ таблицы II, приложенной въ концѣ этой книги.

XVI.

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\tau_1 y_3}{\tau_3 y_1}$$

$$M = \frac{n_1}{n_3}\,\frac{Z_1}{Z_3}$$

$$\frac{N_1}{N_3} = \frac{R_3 \sin(L_3 - L_2)}{R_1 \sin(L_2 - L_1)}$$

$$m = \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1)}{Z_3}\left[\frac{N_1}{N_3} - \frac{n_1}{n_3}\right]$$

$$(M) = M + \frac{m}{\rho_1}.$$

Значеніе ρ_1, входящее въ послѣднюю формулу, берется изъ перваго приближенія.

Вмѣсто (M) будемъ въ дальнѣйшемъ употреблять обозначеніе M.

Повторяемъ теперь вычисленія, указанныя въ XI и XII, но уже помощью шестизначныхъ логариѳмовъ. При этомъ:

$$\log \frac{6}{2^{\frac{3}{2}}} = 0{,}326606$$

$$\log \sqrt{2} = 0{,}150515.$$

Приступая къ проведенію гипотезъ, указанныхъ въ XII, мы можемъ принять для σ_0 значеніе, найденное въ послѣдней гипотезѣ въ первомъ приближеніи.

Изъ послѣдней же гипотезы въ первомъ приближеніи берется готовымъ значеніе величины $1 - f'(\sigma_0)$.

Опредѣленіе элементовъ.

Вычисленія производятся при помощи шестизначныхъ логариѳмовъ.

XVII. По формуламъ:

$$r \cos b \sin(l - L) = \rho \cos\beta \sin(\lambda - L)$$
$$r \cos b \cos(l - L) = \rho \cos\beta \cos(\lambda - L) - R$$
$$r \sin b = \rho \sin\beta$$

опредѣляемъ значенія r, l, b для моментовъ t_1 и t_3.

Значенія r_1 и r_3 должны согласоваться съ ихъ значеніями, найденными во второмъ приближеніи въ XII. Это сравненіе даетъ контроль вычисленій въ VII, VIII, XI, XII и XVII.

XVIII. $tg\, i \sin(l_1 - \Omega) = tg\, b_1$

$$tg\, i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{tg\, b_3 - tg\, b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)},$$

причемъ:

если $l_3 - l_1 > 0$, то $0° < i < 90°$;

если же $l_3 - l_1 < 0$, то $90° < i < 180°$.

Контроль:

$$tg\, b_3 = tg\, i \sin(l_3 - \Omega).$$

XIX. Опредѣляемъ значенія u_1 и u_3 по одной изъ формулъ:

$$tg\, u = \frac{tg(l - \Omega)}{\cos i} \quad \text{или} \quad tg\, u = \frac{tg\, b}{\sin i \cos(l - \Omega)}.$$

При этомъ:

$0° < u < 180°$, если $b > 0°$;

$180° < u < 360°$, если $b < 0°$.

Важный контроль представляетъ формула:

$$tg\, \frac{1}{2}(u_3 - u_1) = \sqrt{\frac{(\Sigma - r_1)(\Sigma - r_3)}{\Sigma(\Sigma - s)}},$$

гдѣ

$$2\Sigma = r_1 + r_3 + s.$$

Она контролируетъ вычисленія въ XII, XVII, XVIII и XIX.

XX. $$\frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{\sqrt{r_1}} \cot g \frac{1}{2} (u_3 - u_1) - \frac{1}{\sqrt{r_3}} \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (u_3 - u_1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{\sqrt{r_1}},$$

причемъ

$$-90^\circ < \frac{v_1}{2} < 90^\circ.$$

Далѣе

$$\omega = u_1 - v_1$$

$$v_3 = u_3 - \omega.$$

Контроль:

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v_3 = \frac{1}{\sqrt{r_3}}.$$

XXI. $$M = tg \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} tg^3 \frac{1}{2} v; \qquad \log \frac{1}{3} = 9{,}522879$$

$$T = t - \frac{\sqrt{2}}{k} M q^{\frac{3}{2}}; \qquad \log \frac{\sqrt{2}}{k} = 1{,}914934.$$

Примѣняя предыдущія формулы одинъ разъ къ моменту t_1, а другой разъ къ моменту t_3, получаемъ два значенія для T; достаточное согласіе ихъ между собою даетъ контроль.

Представленіе найденными элементами исходныхъ положеній небеснаго тѣла.

Вычисленія производятся при помощи шестизначныхъ логариѳмовъ.

XXII. $$tg 2\beta = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3k} \frac{q^{\frac{3}{2}}}{t - T} = [1{,}738842] \frac{q^{\frac{3}{2}}}{t - T}$$

$$tg\gamma = \sqrt[3]{tg\beta}$$

$$tg \frac{1}{2} v = 2 \cot 2\gamma,$$

причемъ:

если $t - T > 0$, то $0^\circ < 2\beta < +90^\circ$, $0^\circ < \gamma < +90^\circ$, $0^\circ < \frac{1}{2} v < +90^\circ$;

если же $t - T < 0$, то $-90^\circ < 2\beta < 0^\circ$, $-90^\circ < \gamma < 0^\circ$, $-90^\circ < \frac{1}{2} v < 0^\circ$.

$$u = v + \omega, \qquad r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}.$$

XXIII. $$\rho \cos\beta \sin(\lambda - \Omega) = r \sin u \cos i + R \sin(L - \Omega)$$

$$\rho \cos\beta \cos(\lambda - \Omega) = r \cos u + R \cos(L - \Omega)$$

$$\rho \sin\beta = r \sin u \sin i.$$

Назовемъ вычисленныя нами геоцентрическія долготу и широту небеснаго тѣла черезъ λ_c и β_c, а ихъ исходныя значенія черезъ λ_0 и β_0, и пусть

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_c$$

$$\Delta\beta = \beta_0 - \beta_c.$$

Тогда разности $\Delta\lambda \cos\beta$ и $\Delta\beta$ дадутъ средство къ контролю всѣхъ нашихъ вычисленій, начиная съ V. Для перваго и третьяго положеній эти разности не должны превышать $1''.0$. Для второго положенія онѣ не должны выходить изъ предѣловъ возможной неточности наблюденія. Болѣе строгій критерій доставляетъ формула:

$$tg\,(\lambda_2 - L_2)\,.\,\Delta\beta_2 = \frac{1}{2}\sin 2\beta_2\,.\,\Delta\lambda_2.$$

Если при подстановкѣ вмѣсто $\Delta\lambda_2$ и $\Delta\beta_2$ ихъ значеній въ эту формулу ея правая и лѣвая части будутъ значительно отличаться другъ отъ друга, то слѣдуетъ заключить, что небесное тѣло движется по орбитѣ отличной отъ параболы. Въ большинствѣ случаевъ ограничиваются представленіемъ найденными элементами только второго положенія небеснаго тѣла.

§ 58. Примѣръ опредѣленія параболической орбиты по тремъ наблюденіямъ.

Даны слѣдующія три наблюденія кометы 1905 III въ Алжирской обсерваторіи:

	Среднее Алжирское время.	α	δ
1905 Марта 30	$9^h16^m12^s$	$5^h58^m43^s.74$	$15°54'12''.8$
Апрѣля 3	9 14 30	6 14 15 .72	20 44 12 .7
Апрѣля 7	8 58 27	6 31 3 .17	25 24 40 .5

Требуется опредѣлить элементы орбиты этой кометы въ предположеніи, что орбита параболическая.

Подготовка наблюденій.

I.

Долгота Алжирской обсерваторіи относительно Берлина есть

$0^h41^m26^s$ къ западу.

Поэтому, выражая моменты наблюденій по среднему Берлинскому времени, мы получаемъ:

Марта 30	$9^h57^m38^s$
Апрѣля 3	9 55 56
Апрѣля 7	9 39 53.

Или выражая моменты наблюденій въ доляхъ сутокъ, будемъ имѣть:

$$t_1 = 30.41502$$
$$t_2 = 3.41384$$
$$t_3 = 7.40270.$$

II.

t	$f = L$	f_1	f_2	$f = \log R$	f_1	f_2
Мартъ 29	8° 5′44″.0			9.999475		
		59′15″.8			128	
30	9 4 59 .8		—1″.8	603		0
		59 14 .0			128	
31	10 4 13 .8		—1 .8	731		—1
		59 12 .2			127	
Апрѣль 1	11 3 26 .0			858		
2	12 2 36 .2			984		
		59 8 .4			126	
3	13 1 44 .6		—2. 1	0.000110		0
		59 6 .3			126	
4	14 0 50 .9		—1 .9	236		—1
		59 4 .4			125	
5	14 59 55 .3			361		
6	15 58 57 .6			485		
		59 0 .2			123	
7	16 57 57 .8		—2 .2	608		0
		58 58 .0			123	
8	17 56 55 .8		—2 .1	731		—1
		58 55 .9			122	
9	18 55 51 .7			853		

	t_1	t_2	t_3
n	0.41502	0.41384	0.40270
$\frac{1}{2} n (n-1)$ *)	—0.12	—0.12	—0.12

	L			$\log R$		
f_1	59′14″.0	59′6″.3	58′58″.0	128	126	12
f_2	—1.8	—2.0	—2.2	0	0	
n	9.61807	9.61683	9.60498	9.618	9.617	9.60
f_1	3.55072	3.54978	3.54876	2.107	2.100	2.09
nf_1	3.16879	3.16661	3.15374	1.725	1.717	1.69
f	9° 4′59″.8	13° 1′44″.6	16°57′57″.8	9.999603	0.000110	0.00060
nf_1	24 35 .0	24 27 .6	23 44 .8	53	52	
$\frac{1}{2} n (n-1) f_2$	0.2	0 .2	0 .3			
	9 29 35 .0	17 21 42 .9	13 26 12 .4	9.999656	0.000162	0.00065

III.

	t_1	t_2	t_3
G	75°17′	74°26′	73°36′
α	89 41	93 34	97 46
H	259 34	255 18	251 4
$G+\alpha$	164 58	168 0	171 22
$H+\alpha$	349 15	348 52	348 50
δ	15 54	20 44	25 25
$\sin(G+\alpha)$	9.4139	9.3179	9.1764
g	0.9210	0.9236	0.9267
$\cos(G+\alpha)$	9.9849_n	9.9904_n	9.9951_n
$\sin(H+\alpha)$	9.2707_n	9.2858_n	9.2870_n
h	1.2748	1.2759	1.2773
$\cos(H+\alpha)$	9.9923	9.9917	9.9917
$g \sin(G+\alpha)$	0.3349	0.2415	0.1031
$tg\ \delta$	9.4546	9.5781	9.6769
$h \sin(H+\alpha)$	0.5455_n	0.5617_n	0.5643_n
$\cos\delta$	9.9831	9.9709	9.9558
ι	0.9049_n	0.8988_n	0.8905_n
$h \cos(H+\alpha)$	1.2671	1.2676	1.2690
$\sin\delta$	9.4377	9.5490	9.6327

*) Пріискано по таблицѣ I.

	t_1	t_2	t_3
f	4″.86	5″.16	5″.47
$g \sin(G+\alpha) \operatorname{tg}\delta$	0 .62	0 .66	0 .60
$h \sin(H+\alpha) \sec\delta$	— 3 .65	— 3 .90	4 .06
$\Delta\alpha$	1 .83	1 .92	2 .01
$g \cos(G+\alpha)$	— 8 .05	— 8 .20	— 8 .35
$h \cos(H+\alpha) \sin\delta$	5 .07	6 .56	7 .97
$\iota \cos\delta$	— 7 .73	— 7 .40	— 7 .02
$\Delta\delta$	—10 .71	— 9 .04	— 7 .40
α	89°40′56″.1	93°33′55″.9	97°45′47″.5
$\Delta\alpha$	1 .8	1 .9	2 .0
$\alpha - \Delta\alpha$	89 40 54 .3	93 33 54 .0	97 45 45 .5
δ	15 54 12 .8	20 44 12 .7	25 24 40 .5
$\Delta\delta$	—10 .7	—9 .0	—7 .4
$\delta - \Delta\delta$	15 54 23 .5	20 44 21 .7	25 24 47 .9

IV.

ε	23°27′ 5″.9
$\frac{1}{2}\varepsilon$	11 43 33 .0
$\sin\frac{1}{2}\varepsilon$	9.307985
2	0.301030
$2\sin\frac{1}{2}\varepsilon$	9.609015

	t_1	t_2	t_3
α	89°40′54″.3	93°33′54″.0	97°45′45″.5
δ	15 54 23 .5	20 44 21 .7	25 24 47 .9
$\sin\alpha$	9.999993	9.999159	9.996002
$\cos\delta$	9.983044	9.970905	9.955801
$\cos\alpha$	7.744644	8.793657_n	9.130557_n
$n \sin N$	9.437860	9.549147	9.632604
$\cos N$	9.983043	9.970800	9.955059
$n \cos N$	9.983037	9.970064	9.951803
$\operatorname{tg} N$	9.454823	9.579083	9.680801
N	15°54′24″.5	20°46′34″.1	25°37′6″.1
$N - \varepsilon$	—7 32 41 .4	—2 40 31 .8	2 10 0 .2
$\cos(N-\varepsilon)$	9.996224	9.999527	9.999689
n	9.999994	9.999264	9.996744
$\sin(N-\varepsilon)$	9.118271_n	8.669124_n	8.577577

	t_1	t_2	t_3
$\cos\beta\sin\lambda$	9.996218	9.998791	9.996433
$\sin\lambda$	9.999994	9.999263	9.996739
$\cos\beta\cos\lambda$	7.727688	8.764562_n	9.086358_n
$tg\,\lambda$	2.268530	1.234229_n	0.910075_n
$\sin\beta$	9.118265_n	8.668388_n	8.574321
$\cos\beta$	9.996224	9.999528	9.999694
$tg\,\beta$	9.122041_n	8.668860_n	8.574627
	89°41′28″.5	93°20′14″.5	97°0′44″.9
β	—7 32 41 .0	—2 40 15 .5	2 9 1 .9

Контроль:

	t_1	t_2	t_3
$\frac{1}{2}(\delta+\beta)$	4°10′50″.8	9°2′3″.1	13°46′54″.9
$N-\frac{1}{2}\varepsilon$	4 10 51 .5	9 3 1 .1	13 53 33 .1
$\sin\left(N-\frac{1}{2}\varepsilon\right)$	8.862770	9.196733	9.380395
$\sec\beta$	0.004676	0.000472	0.000306
$\cos\alpha$	7.744644	8.793657_n	9.130557_n
n	9.999994	9.999264	9.996744
$\sec\frac{1}{2}(\delta+\beta)$	0.001157	0.005421	0.012687
$\cos\left(N-\frac{1}{2}\varepsilon\right)$	9.998843	9.994560	9.987106
$\sin(\lambda-\alpha)$	6.221099	7.599141_n	8.117017_n
$\lambda - x$	0°0′34″.2	—0°13′39″.5	—0°45′0″.6
	0 0 34 .2	—0 13 39 ·5	—0°45′0″.6
$\sin\frac{1}{2}(\delta-\beta)$	9.307979	9.307230	9.304522
$\frac{1}{2}(\delta-\beta)$	11°43′32″.4	11°42′18″.6	11°37′53″.0
	11 43 32 .3	11 42 18 .6	11 37 53 .0

Итакъ, въ основаніе опредѣленія орбиты должны быть положены слѣдующія величины:

	t	L	R	λ	β
1905 Марта	30.41502	9°29′35″.0	9.993656	89°41′28″.5	—7°32′41″.0
Апрѣля	3.41384	13 26 12 .4	0.000162	93 20 14 .5	—2 40 15 .5
Апрѣля	7.40270	17 21 42 .9	0.000658	97 0 44 .9	2 9 1 .9

Вычисленіе вспомогательныхъ величинъ.

V.

$\lambda_2 - L_2$	79°54′2″.1	$tg\ \beta_2$	8.668860_n
		$sin\ (\lambda_2 - L_2)$	9.993218
		$tg\ J_2$	8.675642_n

VI.

$\lambda_1 - L_2$	76°15′16″.1	$\lambda_3 - L_2$	83°34′32″.5
$sin\ \beta_1$	9.118265_n	$cos\ \beta_3$	9.999694
$cot\ J_2$	1.324358_n	$sin\ (\lambda_3 - L_2)$	9.997264
$cos\ \beta_1$	9.996224	$sin\ \beta_3$	8.574321
$sin\ (\lambda_1 - L_2)$	9.987381	$cot\ J_2$	1.324358_n
$sin\ \beta_1\ cot\ J_2$	0.442623	$cos\ \beta_3\ sin\ (\lambda_3 - L_2)$	9.996958
	9.814566		0.254664
$cos\ \beta_1\ sin\ (\lambda_1 - L_2)$	9.983605	$sin\ \beta_3\ cot\ J_2$	9.898679_n
	0.459018		9.901721
Z_1	0.257189	Z_3	0.251622

VII.

$L_1 - L_2$	—3°56′37″.4	$R_3\ sin\ (L_3 - L_2)$	8.836050
$L_3 - L_2$	3 55 30 .5		0.300507
		$R_1\ sin\ (L_1 - L_2)$	8.837096_n
$sin\ (L_3 - L_2)$	8.835392		9.998954
R_3	0.000658	$R_3\ cos\ (L_3 - L_2)$	9.999638
$cos\ (L_3 - L_2)$	9.998980		7.368000
$sin\ (L_1 - L_2)$	8.837440_n	$R_1\ cos\ (L_1 - L_2)$	9.998626
R_1	9.999656		0.001012
$cos\ (L_1 - L_2)$	9.998970		
		$tg\ G$	1.770977
$g\ sin\ G$	9.137603	g	9.137665
$sin\ G$	9.999938	G	89°1′45″.3
$g\ cos\ G$	7.366626		

VIII.

$\lambda_1 - L_1$	80°11′53″.5	$\lambda_3 - L_3$	79°39′2″.0
$cos\ \beta_1$	9.996224	$cos\ \beta_3$	9.999694
$cos\ (\lambda_1 - L_1)$	9.231063	$cos\ (\lambda_3 - L_3)$	9.254430
$cos\ \psi_1$	9.227287	$cos\ \psi_3$	9.254124
R_1	9.999656	R_3	0.000658
$sin\ \psi_1$	9.993726	$sin\ \psi_3$	9.992886

f_1	9.226943	f_3'	9.254782
l_1	9.993382	l_3'	9.993544
f_1	0.168633		

Первое приближеніе.

IX.

$t_3 - t_2$	3.98886	0.60085	
$t_3 - t_1$	7.98768	0.90242	
$t_2 - t_1$	3.99882	0.60193	
Контроль:			
τ_1	8.83643	τ_1	8.83643
τ_3	9.13800		0.30049
τ_3	8.83751	τ_3	8.83751
			0.00108
		τ_2	9.13800

X.

τ_1	8.83643	$\tau_1 Z_1$	9.09362
Z_1	0.25719	$\tau_3 Z_3$	9.08913
τ_3	8.83751	M	0.00449
Z_3	0.25162		

XI.

$\cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2)$	9.99696	$h \cos\zeta \sin H$	8.60645
$\cos\beta_3$	9.99969	$\cos H$	9.97761
$\cos(\lambda_3 - L_2)$	9.04879	$h \cos\zeta \cos H$	9.08843_n
$\sin\beta_3$	8.57432	$tg\, H$	9.51802_n
$\cos\beta_1$	9.99622	$h \sin\zeta$	9.22844
$\cos(\lambda_1 - L_2)$	9.37587	$\sin\zeta$	9.90042
		$h \cos\zeta$	9.11082
$M \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2)$	0.00145	$tg\, \zeta$	0.11762
	1.39500	$1 : h$	0.67198
$\cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2)$	9.98360		
	0.01785	H	161°45′24″
		G	89 1 45
$M \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_2)$	9.05297	$G - H$	— 72 43 39
	0.28366	ζ	52 39 55
$\cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_2)$	9.37209		
	0.31912		
$M \sin\beta_3$	8.57881		
	0.11018		
$\sin\beta_1$	9.11826_n		
	0.53945		

$\cos \zeta$	9.78280	f_3'	9.25478
$\cos(G-H)$	9.47263	M	0.00449
$\cos \varphi$	9.25543	l_3'	9.99354
g	9.13766	f_3	9.25029
$\sin \varphi$	9.99284	l_3	9.98905
$g \sin \varphi$	9.13050	f_3	0.17795
f	8.39309		
l	8.26100		

XII.

	Первая гипотеза.	Вторая гипотеза.	Третья гипотеза.
σ_0	2	2.2323	2.2383
σ_0	0.30103	0.34875	0.34992
σ_0^3	0.90309	1.04625	1.04976
$\sigma_0^{\frac{3}{2}}$	0.45154	0.52312	0.52488
$\sin 3\theta$	9.01307	8.94149	8.93973
3θ	5°54′55″	5° 0′50″	4°59′37″
θ	1 58 18	1 40 17	1 39 52
$\sin \theta$	8.53662	8.46489	8.46309
$\sin \gamma$	8.68714	8.61541	8.61361
γ	2°47′20″	2°21′51″	2°21′15″
2γ	5 34 40	4 43 42	4 42 30
$\sin 2\gamma$	8.98765	8.91609	8.91426
s	9.28868	9.26484	9.26418
s^2	8.57736	8.52968	8.52836
	0.28623	0.33599	0.33753
	0.31636	0.26868	0.26736
s^2-l	8.29113	8.19369	8.19083
$\sqrt{}$	9.14557	9.09684	9.09542
	0.07071	0.07839	0.07862
	0.75248	0.70375	0.70233
$f+\sqrt{}$	9.21628	9.17523	9.17404
ρ_1	9.88826	9.84721	9.84602
ρ_1	0.77314	0.70341	0.70149
ρ_1-f_1	0.60451	0.53478	0.53286
ρ_3-f_3	0.59519	0.52546	0.52354

	Первая гипотеза.	Вторая гипотеза.	Третья гипотеза.
$\rho_1 - f_1$	9.78141	9.72818	9.72661
$\rho_3 - f_3$	9.77465	9.72054	9.71895
$tg\,\theta_1$	9.78803	9.73480	9.73323
$tg\,\theta_3$	9.78560	9.73149	9.72990
$sec\,\theta_1$	0.06943	0.05611	0.05575
$sec\,\theta_3$	0.06876	0.05536	0.05500
r_1	0.06281	0.04949	0.04913
r_3	0.06230	0.04890	0.04854
r_1	1.1556	1.1207	1.1198
r_3	1.1542	1.1192	1.1183
$f(\sigma_0)$	2.3098	2.2399	2.2381
$f(\sigma_0) - \sigma_0$	0.3098	0.0076	
$sin\,\theta_3$	9.7168	9.6761	
$M\,sin\,\theta_3$	9.7213	9.6810	
	0.2997	0.2998	
$sin\,\theta_1$	9.7186	9.6787	
	0.0026	0.0023	
$sin\,\theta_1 + M\,sin\,\theta_3$	0.0210	9.9808	
$sin^2\,\gamma$	7.3743	7.2308	
$2\sigma_0$	0.6020	0.6498	
$1:\sqrt{\ }$	0.8544	0.9032	
$f'(\sigma_0)$	9.5237_n	9.4366_n	
$1 - f'(\sigma_0)$	0.1251	0.1049	
$f(\sigma_0) - \sigma_0$	9.4911	7.8808	
$\Delta\sigma_0$	9.3660	7.7759	
$\Delta\sigma_0$	0.2323	0.0060	
σ_1	2.2323	2.2383	

Проведеніе гипотезъ можно считать законченнымъ.

ρ_1	9.84602
M	0.00449
ρ_3	9.85051

Второе приближение.

XIII.

τ_1	8.8364	$\tau_1 \rho_1$	8.6824
ρ_1	9.8460		0.2982
τ_3	8.8375	$\tau_3 \rho_3$	8.6880
ρ_3	9.8505		0.0056
		$\tau_2 \rho_2$	8.9862
		τ_2	9.1380
		ρ_2	9.8482

ρ	9.8460	9.8482	9.8505
Δt	7.6072	7.6094	7.6117
	30.41502	3.41384	7.40270
Δt	405	407	409
t	30.41097	3.40977	7.39861

IX.

$t_3 - t_2$	3.98884	0.600846
$t_3 - t_1$	7 98764	0.902418
$t_2 - t_1$	3.99880	0.601930

Контроль:

τ_1	8.836427	τ_1	8.836427
τ_2	9.137999		0.300488
τ_3	8.837511	τ_3	8.837511
			9.998916
		τ_2	9.137999

XIV.

r_1	0.04913	Первая гипотеза.	
$r_2^{\,2}$	0.09826	S	9.23567
τ_1	8.83643	τ_2	9.13800
r_3	0.04854	$r_2^{\,2}$	0.09767
$r_3^{\,2}$	0.09708	r_2	0.04884
τ_3	8.83751	Вторая гипотеза.	
$\tau_1 r_1^{\,2}$	8.93469	τ_1	8.83643
	0.30098	τ_2	9.13800
$\tau_3 r_3^{\,2}$	8.93459	τ_3	8.83751
	0.00010	$\tau_1 \tau_2 \tau_3$	6.81194
S	9.23567	r_2	0.04484

Вторая гипотеза.

$\tau_1\tau_2\tau_3 : r_2$	6.76310
	0.00146
S	9.23567
	2.47257
$\tau_2 r_2^{\,2}$	9.23421
τ_2	9.13800
r_2	0.09621
r_2	0.04810

XV.

r_2	0.04810	r_1	0.04913
	0.30081		0.30052
r_3	0.04854	r_2	0.04810
	0.00044		0.00103
$r_2 + r_3$	0.34935	$r_1 + r_2$	0.34965
$(r_2 + r_3)^3$	1.04805	$(r_1 + r_2)^3$	1.04895
$(r_2 + r_3)^{\frac{3}{2}}$	0.52402	$(r_1 + r_2)^{\frac{3}{2}}$	0.52448
$2\tau_1$	9.13746	$2\tau_3$	9.13854
η_1	8.61344	η_3	8.61406
η_1	0.04106	η_3	0.04112

По таблицѣ II пріискиваемъ:

y_1	0.000245	y_3	0.000245

XVI.

τ_1	8.836427	$R_3 \sin(L_3 - L_2)$	8.836050
y_3	0.000245	$R_1 \sin(L_2 - L_1)$	8.837096
τ_3	8.837511	$N_1 : N_3$	9.998954
y_1	0.000245		5.940
		$n : n_3$	9.998916
$\tau_1 y_3$	8.836672		0.000038
$\tau_3 y_1$	8.837756	[ ]	5.939
$n_1 : n_3$	9.998916	$R_1 \sin(L_2 - L_1)$	8.837
$Z_1 : Z_3$	0.005567	$1 : Z_3$	9.748
M	0.004483	m	4.524
	0.000002	ρ_1	9.846
$m : \rho_1$	4.678		
	4.673		
(M)	0.004485		

XI.

$\cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2)$	9.996958
$\cos\beta_3$	9.999694
$\cos(\lambda_3 - L_2)$	9.048973
$\sin\beta_3$	8.574321
$\cos\beta_1$	9.996224
$\cos(\lambda_1 - L_2)$	9.375865
$M \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2)$	0.001443
	8.622512
$\cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2)$	9.983605
	0.017838
$M \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_2)$	9.052972
	0.035450
$\cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_2)$	9.372089
	0.319117
$M \sin\beta_3$	8.578806
	0.110173
$\sin\beta_1$	9.118265_n
	9.460541
$\cos\zeta$	9.782788
$\cos(G-H)$	9.472330
$\cos\varphi$	9.255118
g	9.137665
$\sin\varphi$	9.992853
$g \sin\varphi$	9.130518
f	8.392783
l	8.261036

$h \cos\zeta \sin H$	8.606117
$\cos H$	9.977634_n
$h \cos\zeta \cos H$	9.088422_n
$tg\, H$	9.517695_n
$h \sin\zeta$	9.228438
$\sin\zeta$	9.900438
$h \cos\zeta$	9.110788
$tg\,\zeta$	0.117650
$1 : h$	0.672000
H	161°46′ 9″.3
G	89 1 45 .3
$G - H$	—72 44 24 .0
ζ	52 40 3 .0
f_3'	9.254782
M	0.004485
l_3'	9.993544
f_3	9.250297
l_3	9.989059
f_3	0.177950

XII.

	Первая гип.	Вторая гип.
σ_0	2.2382	2.23807
σ_0	0.349899	0.349873
σ_0^3	1.049697	1.049619
$\sigma_0^{\frac{3}{2}}$	0.524848	0.524810
$\sin 3\theta$	8.939757	8.939795
3θ	4°59′37″.6	4°59′39″.2
θ	1 39 52 .5	1 39 53 .1
$\sin\theta$	8.463122	8.463165
$\sin\gamma$	8.613637	8.613680
γ	2°21′15″.9	2°21′16″.7
2γ	4 42 31 .8	4 42 33 .4
$\sin 2\gamma$	8.914302	8. 14342

	Первая гипотеза.	Вторая гипотеза.
s	9.264201	9.264215
s^2	8.528402	8.528430
	9.929841	9.929902
	0.267366	0.267394
$s^2 - l$	8.190877	8.190938
$\sqrt{}$	9.095438	9.095469
	0.078569	0.078564
	9.297345	9.297314
$f + \sqrt{}$	9.174007	9.174033
ρ_1	9.846007	9.846033
ρ_1	0.701467	0.701508
$\rho_1 - f_1$	0.532834	0.532875
$\rho_1 - f_3$	0.523517	0.523558
$\rho_1 - f_1$	9.726592	9.726625
$\rho_1 - f_3$	9.718931	9.718964
$tg\, \theta_1$	9.733210	9.733243
$tg\, \theta_3$	9.729872	9.729905
$sec\, \theta_1$	0.055749	0.055756
$sec\, \theta_3$	0.054997	0.055005
r_1	0.049131	0 049138
r_3	0.048541	0.048549
r_1	1.11978	1.11979
r_3	1.11826	1.11828
$f(\sigma_0)$	2.23804	2.23807
$f(\sigma_0) - \sigma_0$	—0.00016	
$1 - f'(\sigma_0)$	0.1049	
$f(\sigma_0) - \sigma_0$	6.2041_n	
$\Delta\sigma_0$	6.0992_n	
$\Delta\sigma_0$	—0.00013	
σ_1	2.23807	

Проведеніе гипотезъ можно считать законченнымъ.

ρ_1	9.846033
M	0.004485
ρ_3	9.850518

Опредѣленіе элементовъ.

XVII.

	t_1	t_3
$\cos\beta$	9.996224	9.999694
ρ	9.846033	9.850518
$\sin\beta$	9.118265_n	8.574321
$\sin(\lambda-L)$	9.993613	9.992876
$\rho\cos\beta$	9.842257	9.850212
$\cos(\lambda-L)$	9.231063	9.254430
$\rho\cos\beta\cos(\lambda-L)$	9.073320	9.104642
	9.945230	9.940988
R	9.999656	0.000658
	0.926336	0.896016
$r\cos b\sin(l-L)$	9.835870	9.843088
$\cos(l-L)$	9.897223_n	9.893220_n
$r\cos b\cos(l-L)$	9.944886_n	9.941646_n
$tg(l-L)$	9.890984_n	9.901442_n
$r\sin b$	8.964298_n	8.424839
$\cos b$	9.998526	9.999877
$r\cos b$	0.047663	0.048426
$tg\, b$	8.216635_n	8.376413
r	0.049137	0.048549
$l-L$	142° 7′ 0″.5	141°26′46″.3
L	9 29 35 .0	17 21 42 .9
l	151 36 36 .0	158 48 29 .2
b	—4 43 5 .4	1 21 46 .3

XVIII.

l_3-l_1	7°11′53″.2
$tg\, b_1$	8.916635_n
$\cos(l_3-l_1)$	9.996564
$tg\, b_3$	8.376413
	0.110773
$tg\, b_1\cos(l_3-l_1)$	8.913199_n
	9.463214
$tg\, b_3-tg\, b_1\cos(l_3-l_1)$	9.023972
$\sin(l_3-l_1)$	9.097953

$tg\, i\sin(l_1-\Omega)$	8.916635_n
$\cos(l_1-\Omega)$	9.997931
$tg\, i\cos(l_1-\Omega)$	9.926019
$tg(l_1-\Omega)$	8.990616_n
$tg\, i$	9.928088

$l_1 - \Omega$	$-5°35'21''.5$
l_1	151 36 36 .0
Ω	157 11 57 .5
l_3	158 48 29 .2
$l_3 - \Omega$	1 36 31 .7
i	40 16 40 .5

Контроль:

$tg\, i$	9.928088
$sin(l_3 - \Omega)$	8.448324
$tg\, b_3$	8.376412
	8.376413

XIX.

$tg\,(l_1 - \Omega)$	8.990616_n
$cos\, i$	9.882478
$tg\,(l_3 - \Omega)$	8.448496
$tg\, u_1$	9.108138_n
$tg\, u_3$	8.566018
u_1	$-7°18'34''.7$
u_3	2 6 30 .1

Контроль:

r_1	1.119792
r_3	1.118277
s	0.183745
2Σ	2.421814
Σ	1.210907
$\Sigma - r_1$	0.091115
$\Sigma - r_3$	0.092630
$\Sigma - s$	1.027162

$\Sigma - r_1$	8.959590
$\Sigma - r_3$	8.966752
Σ	0.083111
$\Sigma - s$	0.011639
$(\Sigma - r_1)\,(\Sigma - r_3)$	7.926342
$\Sigma\,(\Sigma - s)$	0.094750
$tg^2\, \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	7.831592
$tg\, \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	8.915796
$\frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	$4°42'32''.8$
	$4\ 42\ 32''.4$

XX.

$cot\, \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	1.084215
$\sqrt{r_1}$	0.024569
$cosec\, \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	1.085683
$\sqrt{r_3}$	0.024274
$cot\, \frac{1}{2}(u_3 - u_1) : \sqrt{r_1}$	1.059646
	7.609250
$cosec\, \frac{1}{2}(u_3 - u_1) : \sqrt{r_3}$	1.061409
	0.001763

$\frac{1}{\sqrt{q}}\, sin\, \frac{1}{2}\, v_1$	8.668896_n
$cos\, \frac{1}{2}\, v_1$	9.999471
$\frac{1}{\sqrt{q}}\, cos\, \frac{1}{2}\, v_1$	9.975431
$tg\, \frac{1}{2}\, v_1$	8.693465_n
$\sqrt{q}$	0.024040
q	0.048080

$\frac{1}{2}v_1$	—2°49′35″.1	**Контроль:**	
v_1	—5 39 10 .2	$\cos\frac{1}{2}v_3$	9.999765
u_1	—7 18 34 .7	$\sqrt{q}$	0.024040
ω	—1 39 24 .5	$\frac{1}{\sqrt{q}}\cos\frac{1}{2}v_3$	9.975725
u_3	2 6 30 .1		
v_3	3 45 54 .6		9.975726
$\frac{1}{2}v_3$	1 52 57 .3		

XXI.

$q^{\frac{3}{2}}$	0.072120
$\sqrt{2}:k$	1.914934
	1.987054

	t_1	t_3
$tg^3\frac{1}{2}v$	6.080395_n	5.550364
$tg\frac{1}{2}v$	8.693465_n	8.516788
	0.000353	0.000157
$\frac{1}{3}tg^3\frac{1}{2}v$	5.603274_n	5.073243
	6.9098	6.5565
M	8.693818_n	8.516945
$T-t$	0.680872_n	0.503999
t	30.41097	7.39861
$T-t$	—4.79592	3.19154
T	4.20689	4.20707.

Въ среднемъ выходитъ:

T 4.20698.

Такимъ образомъ мы опредѣлили слѣдующія значенія элементовъ орбиты:

i	40°16′40″.5	1905.0
☊	157 11 57 .5	1905.0
ω	—1 39 24 .5	1905.0
q	0.048080	
T	1905, Апрѣля 4.20698 средн. Берл. врем.	

Представленіе найденными элементами второго положенія.

XXII.

t	3.40977	$\cot 2\gamma$	7.613563_n
T	4.20698	2	0.301030
$t-T$	—0.79721	$tg\ \frac{1}{2}v$	7.914593_n
$q^{\frac{3}{2}}$	0.072120	$\frac{1}{2}v$	—0°28′14″.3
	1.738842	v	—0 56 28 .6
$t-T$	9.901573_n	ω	—1 39 24 .5
$tg\ 2\beta$	1.909389_n	u	—2 35 53 .1
2β	—89°17′38″.9	$\cos \frac{1}{2}v$	9.999985
β	—44 38 49 .4	$\cos^2 \frac{1}{2}v$	9.999970
$tg\ \beta$	9.994649_n	q	0.048080
$tg\ \gamma$	9.998216_n	r	0.048110
γ	—44°52′56″.4		
2γ	—89 45 52 .8		

XXIII.

L	13°26′12″.4	$r \cos u$	0.047664
☊	157 11 57 .5		9.583329
L — ☊	—143 45 45 .1	$R \cos (L$—☊)	9.906806_n
$\sin u$	8.656382_n		0.140858
r	0.048110	$\rho \cos\beta \sin(\lambda$ — ☊)	9.799332_n
$\cos u$	9.999554	$\sin(\lambda$ — ☊)	9.953154_n
$\cos i$	9.882478	$\rho \cos\beta \cos(\lambda$ — ☊)	9.490135
$r \sin u$	8.704492_n	$tg\ (\lambda$ — ☊)	0.309197_n
$\sin i$	9.810565	$\rho \sin\beta$	8.515057_n
$\sin(L$—☊)	9.771685_n	$\rho \cos\beta$	9.846178
R	0.000162	$tg\ \beta$	8.668879_n
$\cos(L$—☊)	9.906644_n	λ — ☊	—63°51′48″.5
$r \sin u \cos i$	8.586970_n	☊	157 11 57 .5
	0.027485	λ	93 20 9 .0
$R \sin L$—☊)	9.771847_n	β	—2 40 15 .9
	8.815123	$\Delta\lambda \cos\beta$	+5″.5
		$\Delta\beta$	+0 .4

Такое представленіе второго положенія можно считать удовлетворительнымъ.

§ 59. Опредѣленіе орбиты метеорнаго потока по координатамъ его радіанта.

Положеніе радіанта метеорнаго потока опредѣляется его прямымъ восхожденіемъ α и склоненіемъ δ. По правиламъ сферической астрономіи отъ этихъ координатъ, получаемыхъ изъ наблюденій, можно перейти къ астрономическимъ долготѣ λ и широтѣ β радіанта. Зная λ и β, можно опредѣлить элементы орбиты метеорнаго потока, причемъ при рѣшеніи этой задачи довольствуются лишь приближенными результатами.

Опредѣлимъ прежде всего скорость относительнаго движенія потока по отношенію къ наблюдателю.

Вообразимъ въ пространствѣ систему прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ, въ которой начало находится въ центрѣ солнца, плоскость XOY совпадаетъ съ плоскостью эклиптики и ось OX направлена въ точку весенняго равноденствія, и пусть составляющія на этихъ осяхъ относительной скорости потока по отношенію къ точкѣ наблюденія представляются производными

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt},$$

причемъ предполагается, что различныя точки метеорнаго потока обладаютъ одною и тою же скоростью. Подобнымъ же образомъ пусть производныя

$$\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{dZ}{dt}$$

и

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

представляютъ составляющія на осяхъ координатъ абсолютныхъ скоростей точки наблюденія и метеорнаго потока.

Въ такомъ случаѣ должны имѣть мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} + \frac{dX}{dt}\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d\eta}{dt} + \frac{dY}{dt}\\ \frac{dz}{dt} &= \frac{d\zeta}{dt} + \frac{dZ}{dt}\,.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (193)$$

Для удобства дальнѣйшихъ выкладокъ примемъ для относительной скорости метеорнаго потока по отношенію къ мѣсту наблюденія обозна-

ченіе γk, гдѣ γ есть отношеніе этой скорости къ Гауссовой постоянной k. Въ такомъ случаѣ мы можемъ написать такія соотношенія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= -\gamma k \cos\lambda \cos\beta \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\gamma k \sin\lambda \cos\beta \\ \frac{d\zeta}{dt} &= -\gamma k \sin\beta.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (194)$$

Въ этихъ соотношеніяхъ знакъ — взятъ потому, что направленіе линіи визированія противоположно направленію движенія метеора въ моментъ его видимости.

При рѣшеніи нашей задачи мы, слѣдуя Скіапарелли, будемъ принимать, что метеорный потокъ движется по параболической орбитѣ. Въ такомъ случаѣ интегралъ живой силы въ примѣненіи къ метеорному потоку, если пренебречь массой потока въ сравненіи съ массой солнца, напишется въ видѣ:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots (195)$$

При этомъ мы приняли разстояніе метеоровъ отъ солнца въ моментъ ихъ возгоранія въ земной атмосферѣ равнымъ разстоянію R земли отъ солнца, что допустимо въ виду приближеннаго рѣшенія задачи.

Имѣя въ виду уравненія (193) и (194), мы уравненіе (195) можемъ переписать такъ:

$$\gamma^2 k^2 - 2\gamma k \cos\lambda \cos\beta \frac{dX}{dt} - 2\gamma k \sin\lambda \cos\beta \frac{dY}{dt} - 2\gamma k \sin\beta \frac{dZ}{dt} +$$
$$+ \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{R}.$$

Это уравненіе заключаетъ только одну неизвѣстную γ, такъ какъ производныя $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$ и $\frac{dZ}{dt}$ могутъ быть опредѣлены на основаніи нижеслѣдующихъ соображеній.

Находящаяся на поверхности земли точка наблюденія обладаетъ двумя движеніями: годовымъ и суточнымъ. Но такъ какъ линейная скорость суточнаго движенія значительно меньше линейной скорости годового движенія, то при рѣшеніи нашей задачи мы можемъ принимать во вниманіе только одно годовое движеніе. Имѣя это въ виду, а также помня, что за плоскость XOY принята плоскость эклиптики, мы безъ ощутительной погрѣшности можемъ для точки наблюденія принять:

$$Z = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dZ}{dt} = 0.$$

Съ другой стороны, примѣняя интегралъ живой силы къ землѣ или, что въ данномъ случаѣ одно и то же, къ точкѣ наблюденія, имѣемъ:

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 = k^2\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right).$$

Здѣсь мы пренебрегли массой земли въ сравненіи съ массой солнца. Кромѣ того извѣстно, что большая полуось a земной орбиты принимается за единицу. Поэтому можемъ написать:

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 = k^2\left(\frac{2}{R} - 1\right).$$

Принимая все это во вниманіе, мы можемъ упростить уравненіе для опредѣленія γ. Именно оно приметъ слѣдующій видъ:

$$\gamma^2 k^2 - 2\gamma k \cos\beta\left(\cos\lambda\frac{dX}{dt} + \sin\lambda\frac{dY}{dt}\right) + k^2\left(\frac{2}{R} - 1\right) = \frac{2k^2}{R}.$$

Раздѣляя это уравненіе на k^2 и перенося члены, не зависящіе отъ γ, во вторую часть, получаемъ:

$$\gamma^2 - \frac{2\gamma}{k}\cos\beta\left(\cos\lambda\frac{dX}{dt} + \sin\lambda\frac{dY}{dt}\right) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

Въ этомъ уравненіи остается еще выразить $\frac{dX}{dt}$ и $\frac{dY}{dt}$ черезъ извѣстныя величины.

Принимая, какъ это мы только что дѣлали, что мѣсто наблюденія совпадаетъ съ центромъ земли, мы будемъ имѣть соотношенія:

$$X = -R\cos\odot,$$

$$Y = -R\sin\odot,$$

гдѣ $\odot$ означаетъ долготу солнца, отличающуюся отъ долготы земли на 180°.

Такъ какъ видимое движеніе солнца вокругъ земли происходитъ въ плоскости эклиптики, то имѣемъ:

$$\odot = v + \Gamma,$$

гдѣ v есть истинная аномалія, а Γ — долгота перигея.

Дифференцируя предыдущее уравненіе, получаемъ:

$$\frac{d\odot}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Теперь производныя $\frac{dX}{dt}$ и $\frac{dY}{dt}$ могутъ быть написаны въ видѣ:

$$\frac{dX}{dt} = -\cos\odot\frac{dR}{dt} + R\sin\odot\frac{dv}{dt};$$

$$\frac{dY}{dt} = -\sin\odot\frac{dR}{dt} - R\cos\odot\frac{dv}{dt}.$$

Для опредѣленія производной $\frac{dv}{dt}$ воспользуемся интеграломъ площадей, который напишемъ въ видѣ:

$$R^2\frac{dv}{dt} = na^2\sqrt{1-e^2}\cdot$$

Но такъ какъ

$$a = 1 \text{ и } n = \frac{k\sqrt{M_{1,2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = k$$

и кромѣ того

$$\sqrt{1-e^2} = \cos\varphi,$$

то получаемъ:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\cos\varphi}{R^2}.$$

Далѣе изъ уравненія

$$R = a\,(1 - e\cos E),$$

принимая $a = 1$ и полагая $e = \sin\varphi$, находимъ:

$$\frac{dR}{dt} = \sin\varphi\sin E\frac{dE}{dt}.$$

Но изъ уравненія Кеплера имѣемъ:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{R} = \frac{k}{R},$$

такъ что

$$\frac{dR}{dt} = \sin\varphi\sin E\frac{k}{R}.$$

Затѣмъ изъ извѣстнаго соотношенія

$$R\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E$$

опредѣлимъ $\sin E$, полагая опять $a = 1$ и $\sqrt{1-e^2} = \cos\varphi$.

Тогда

$$\sin E = \frac{R\sin v}{\cos\varphi}.$$

Поэтому окончательно имѣемъ:

$$\frac{dR}{dt} = k\, tg\, \varphi\, sin\, v.$$

Подставляя найденныя значенія производныхъ $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{dR}{dt}$ въ выраженія для производныхъ $\frac{dX}{dt}$ и $\frac{dY}{dt}$, получаемъ:

$$\frac{dX}{dt} = -k\, tg\, \varphi\, sin\, v\, cos \odot + \frac{k\, cos\, \varphi}{R} sin \odot =$$

$$= \frac{k}{cos\, \varphi}\left[- sin\, \varphi\, sin\, v\, cos \odot + \frac{cos^2 \varphi\, sin \odot}{R}\right]$$

$$\frac{dY}{dt} = -k\, tg\, \varphi\, sin\, v\, sin \odot + \frac{k\, cos\, \varphi}{R} cos \odot =$$

$$= -\frac{k}{cos\, \varphi}\left[sin\, \varphi\, sin\, v\, sin \odot + \frac{cos^2 \varphi\, cos \odot}{R}\right].$$

Далѣе изъ уравненія

$$R = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\, cos\, v},$$

полагая въ немъ $a = 1$ и $e = sin\, \varphi$, легко выводимъ:

$$\frac{cos^2 \varphi}{R} = 1 + sin\, \varphi\, cos\, v.$$

Внося это выраженіе въ уравненія, служащія для опредѣленія производныхъ $\frac{dX}{dt}$ и $\frac{dY}{dt}$, находимъ:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{k}{cos\, \varphi}\,[sin \odot + sin\, \varphi\, sin\, (\odot - v)]$$

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{k}{cos\, \varphi}\,[cos \odot + sin\, \varphi\, cos\, (\odot - v)].$$

Но такъ какъ

$$\odot - v = \Gamma,$$

то предыдущія уравненія замѣняемъ такими:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{k}{cos\, \varphi}\,[sin \odot + sin\, \varphi\, sin\, \Gamma]$$

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{k}{cos\, \varphi}\,[cos \odot + sin\, \varphi\, cos\, \Gamma].$$

Наконецъ, ограничиваясь лишь первыми степенями эксцентриситета земной орбиты, мы можемъ принять

$$cos\, \varphi = 1,$$

и тогда будетъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{k}\frac{dX}{dt} &= \sin\odot + \sin\varphi\sin\Gamma \\ -\frac{1}{k}\frac{dY}{dt} &= \cos\odot + \sin\varphi\cos\Gamma.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(197$$

Введемъ теперь вспомогательныя величины s и $\odot'$ уравненіями:

$$\left.\begin{aligned}\sin\odot + \sin\varphi\sin\Gamma &= s\sin\odot' \\ \cos\odot + \sin\varphi\cos\Gamma &= s\cos\odot'.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(198)$$

Тогда уравненіе (196) перепишется въ видѣ:

$$\gamma^2 + 2\gamma s\cos\beta\sin(\lambda - \odot') = 1\quad\ldots\ldots(199)$$

Но уравненія (197) и (198) и интегралъ живой силы даютъ:

$$s^2 = \frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2\right] = \frac{2}{R} - 1.$$

Вмѣсто этого можемъ написать:

$$s^2 = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2} + \frac{2}{R} - 1.$$

Или

$$s^2 = \frac{1}{R^2} - \left(\frac{1}{R} - 1\right)^2.$$

Или

$$s^2 = \frac{1}{R^2}\left[1 - (1 - R)^2\right].$$

Извлекая корень, получаемъ:

$$s = \frac{1}{R}\left[1 - (1 - R)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Такъ какъ разность $(1 - R)^2$ есть величина второго порядка относительно эксцентриситета земной орбиты, то можемъ просто принять:

$$s = \frac{1}{R}.$$

Подставляя въ уравненіе (199) вмѣсто s только что найденную его величину, имѣемъ:

$$\gamma^2 + 2\gamma\frac{\cos\beta\sin(\lambda - \odot')}{R} = 1\quad\ldots\ldots(200)$$

Для опредѣленія величины $\odot'$ умножимъ первое изъ уравненій (198)

на $cos \odot$, а второе на $- sin \odot$ и произведенія сложимъ. Тогда получаемъ:

$$s \sin (\odot' - \odot) = \sin \varphi \sin (\Gamma - \odot).$$

Ограничиваясь прежнею точностью, мы въ этомъ уравненіи можемъ положить:

$$s = 1 \quad \text{и} \quad \sin (\odot' - \odot) = (\odot' - \odot) \sin 1'.$$

Тогда для опредѣленія $\odot'$ получаемъ уравненіе:

$$\odot' = \odot + \frac{\sin \varphi \sin (\Gamma - \odot)}{\sin 1'}, \quad \ldots \ldots \; (201)$$

причемъ имѣемъ:

$$\log \frac{\sin \varphi}{\sin 1'} = 1{,}7609$$

и

$$\Gamma = 280°21' + 1',03 \, (t - 1850{,}0).$$

Итакъ, опредѣливши $\odot'$ по уравненію (201), величину γ мы найдемъ изъ квадратнаго уравненія (200). Для рѣшенія его введемъ вспомогательную величину z такимъ уравненіемъ:

$$\cot g\, z = \frac{\cos \beta \sin (\lambda - \odot')}{R} \; \ldots \ldots \ldots \; (202)$$

Тогда получаемъ:

$$\gamma^2 + 2 \gamma \cot g\, z = 1.$$

Рѣшая, имѣемъ:

$$\gamma = - \frac{\cos z}{\sin z} \pm \sqrt{\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} + 1}.$$

Или

$$\gamma = \frac{\pm 1 - \cos z}{\sin z}.$$

Мы можемъ поставить условіе, чтобы всегда брать $0° < z < 180°$ и слѣдовательно $\sin z > 0$. Тогда, чтобы получить для γ положительное значеніе, которое только и можетъ имѣть смыслъ въ нашей задачѣ, мы въ предыдущемъ выраженіи должны удержать предъ единицей знакъ $+$. Въ такомъ случаѣ будетъ:

$$\gamma = \frac{1 - \cos z}{\sin z}.$$

Или

$$\gamma = tg \frac{1}{2} z. \; \ldots \ldots \ldots \ldots \; (203)$$

Найдя γ по этому уравненію, мы будемъ знать и относительную скорость γk метеорнаго потока.

Приступимъ теперь къ опредѣленію элементовъ метеорнаго потока.

Интегралы площадей, какъ это вытекаетъ изъ изслѣдованій главы II, могутъ быть написаны въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= k\sqrt{M_{1,2}\,p}\,sin\,i\,sin\,\Omega \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= -k\sqrt{M_{1,2}\,p}\,sin\,i\,cos\,\Omega \\ x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= k\sqrt{M_{1,2}\,p}\,cos\,i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (204)$$

Въ примѣненіи къ метеорному потоку, движущемуся по параболической орбитѣ, имѣемъ:

$$M_{1,2} = 1 \text{ и } p = 2q,$$

гдѣ q есть линейное разстояніе перигелія отъ солнца. Кромѣ того въ предыдущихъ уравненіяхъ i есть наклонность плоскости орбиты потока къ плоскости эклиптики, а Ω — долгота восходящаго узла первой плоскости по отношенію ко второй.

Далѣе геліоцентрическія координаты x, y, z всякаго метеора въ моментъ наблюденія. какъ мы видѣли выше, можно считать совпадающими съ геліоцентрическими координатами центра земли, т. е. можно принять:

$$x = -R\,cos\,\odot,$$

$$y = -R\,sin\,\odot,$$

$$z = 0.$$

Кромѣ того производная $\frac{dz}{dt}$, какъ это нетрудно вывести изъ вышеизложеннаго, представляется такъ:

$$\frac{dz}{dt} = -\gamma\,k\,sin\,\beta.$$

Поэтому два первыя изъ уравненій (204) даютъ:

$$\left.\begin{aligned} k\sqrt{2q}\,sin\,i\,sin\,\Omega &= \gamma\,k\,R\,sin\,\beta\,sin\,\odot \\ k\sqrt{2q}\,sin\,i\,cos\,\Omega &= \gamma\,k\,R\,sin\,\beta\,cos\,\odot. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (205)$$

Возвышая эти уравненія въ квадратъ и складывая, получаемъ:

$$k^2\,2q\,sin^2\,i = \gamma^2\,k^2\,R^2\,sin^2\,\beta.$$

Отсюда имѣемъ:

$$\sqrt{2q}\,sin\,i = \pm\gamma\,R\,sin\,\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (206)$$

Такъ какъ $\sqrt{2q}$ и γR суть величины существенно положительныя и такъ какъ кромѣ того мы знаемъ, что $sin\, i$ всегда долженъ быть >0, то во второй части предыдущаго уравненія надо брать знакъ $+$ при $sin\, \beta > 0$ и знакъ — при $sin\, \beta < 0$. Далѣе, обращая вниманіе на уравненіе (206), мы изъ уравненія (205) заключаемъ, что

$$\left.\begin{array}{ll} \Omega = \odot & \text{при } sin\, \beta > 0 \\ \Omega = 180^\circ + \odot & \text{при } sin\, \beta < 0, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (207)$$

гдѣ $\odot$ есть долгота солнца въ день наблюденій.

Уравненіями (207) и опредѣляется долгота восходящаго узла орбиты метеорнаго потока. Нетрудно убѣдиться, что въ томъ случаѣ, когда Ω опредѣляется первымъ изъ уравненій (207), метеорный потокъ наблюдается въ своемъ нисходящемъ узлѣ; когда же для опредѣленія Ω служитъ второе изъ уравненій (207), метеорный потокъ наблюдается въ восходящемъ узлѣ. Замѣтимъ, что формулы (207) легко могутъ быть установлены непосредственно при помощи геометрическихъ соображеній.

Для опредѣленія разстоянія q перигелія отъ солнца и наклонности i мы воспользуемся уравненіемъ (206) и третьимъ изъ уравненій (204). Прежде всего займемся преобразованіемъ этого послѣдняго уравненія. Мы можемъ переписать его такъ:

$$k \sqrt{2q}\, cos\, i = R\, sin \odot \frac{dx}{dt} - R\, cos \odot \frac{dy}{dt}.$$

Но на основаніи уравненій (193), (194), (197) и (198) мы имѣемъ:

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma k\, cos \lambda\, cos \beta + k s\, sin \odot'$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma k\, sin \lambda\, cos \beta - k s\, cos \odot'.$$

Умножая первое изъ этихъ уравненій на $sin \odot$, а второе на $-cos \odot$ и складывая, находимъ:

$$k \sqrt{2q}\, cos\, i = \gamma k R\, cos \beta\, sin (\lambda - \odot) + R k s\, cos (\odot' - \odot).$$

Но такъ какъ мы видѣли, что можно принять

$$s = \frac{1}{R},$$

и такъ какъ нетрудно убѣдиться, что $cos\, (\odot' - \odot)$ отличается отъ единицы лишь на величины второго порядка относительно эксцентриситета земной орбиты, то предыдущее уравненіе даетъ:

$$\sqrt{2q}\, cos\, i = 1 + \gamma R\, cos \beta\, sin (\lambda - \odot).$$

Такимъ образомъ для опредѣленія элементовъ q и i будемъ имѣть слѣдующія два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{2q}\,\sin i &= \pm \gamma R \sin\beta \\ \sqrt{2q}\,\cos i &= 1 + \gamma R \cos\beta \sin(\lambda - \odot), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (208)$$

причемъ въ первомъ уравненіи верхній знакъ надо брать при $\sin\beta > 0$ и нижній при $\sin\beta < 0$.

Опредѣлимъ теперь угловое разстояніе перигелія отъ узла. Для этого сначала надо вычислить истинную аномалію v. Возьмемъ уравненіе параболы

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}$$

и продифференцируемъ его по времени. Тогда получимъ:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{q \cos \frac{1}{2} v \,\sin \frac{1}{2} v}{\cos^4 \frac{1}{2} v}\,\frac{dv}{dt} = r\,tg\,\frac{1}{2} v \frac{dv}{dt}.$$

Имѣя въ виду интегралъ площадей, а именно:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k\sqrt{2q},$$

вмѣсто предыдущаго уравненія будемъ имѣть:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k\sqrt{2q}}{r}\,tg\,\frac{1}{2} v.$$

Отсюда находимъ:

$$tg\,\frac{1}{2} v = \frac{r\frac{dr}{dt}}{k\sqrt{2q}}.$$

Числителя въ правой части мы можемъ вычислить, пользуясь соошеніемъ:

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}.$$

На основаніи предыдущаго легко выводимъ:

$$r\frac{dr}{dt} = -R\cos\odot\,[-\gamma k \cos\lambda \cos\beta + k s \sin\odot'] -$$
$$- R\sin\odot\,[-\gamma k \sin\lambda \cos\beta - k s \cos\odot'].$$

Или

$$\frac{r}{k}\ \frac{dr}{dt} = \gamma\, R \cos\beta \cos(\lambda - \odot) - s\, R \sin(\odot' - \odot).$$

А такъ какъ по предыдущему

$$s = \frac{1}{R},$$

то

$$\frac{r}{k}\ \frac{dr}{dt} = \gamma\, R \cos\beta \cos(\lambda - \odot) - \sin(\odot' - \odot).$$

Слѣдовательно истинная аномалія v опредѣляется по уравненію:

$$tg\ \frac{1}{2} v = \frac{\gamma\, R \cos\beta \cos(\lambda - \odot) - \sin(\odot' - \odot)}{\sqrt{2q}} \quad . \ . \ . \ (209)$$

При этомъ надо имѣть въ виду, что $\frac{1}{2} v$ должно заключаться въ предѣлахъ отъ $-90°$ до $+90°$.

Зная v, мы для опредѣленія ω должны еще найти аргументъ широты u. Но нетрудно понять, что при $\sin\beta > 0$, т. е. когда метеорный потокъ наблюдается въ нисходящемъ узлѣ, аргументъ широты $u = 180°$, и при $\sin\beta < 0$, т. е. когда метеорный потокъ наблюдается въ восходящемъ узлѣ, аргументъ широты $u = 0°$. Поэтому имѣемъ:

$$\omega = u - v = 180° - v \quad \text{при } \sin\beta > 0$$

$$\omega = u - v = -v \quad \text{при } \sin\beta > 0.$$

Имѣя въ виду уравненія (207) и замѣчая, что долгота перигелія π выражается уравненіемъ

$$\pi = \omega + \Omega,$$

мы въ обоихъ случаяхъ для опредѣленія π будемъ имѣть:

$$\pi = 180° + \odot - v \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (210)$$

Еще остался не опредѣленнымъ моментъ прохожденія метеорнаго потока черезъ перигелій, но опредѣлять этотъ элементъ въ нашемъ случаѣ не имѣетъ смысла, такъ какъ потокъ обыкновенно бываетъ растянутъ на болѣе или менѣе значительное протяженіе вдоль орбиты.

Итакъ для опредѣленія элементовъ орбиты метеорнаго потока служатъ формулы (201), (202), (203), (207), (208), (209) и (210), а именно:

$$\log \frac{\sin\varphi}{\sin 1'} = 1{,}7609$$

$$\Gamma = 280°\ 21' + 1',03\ (t - 1850{,}0)$$

$$\odot' = \odot + \frac{\sin\varphi \sin(\Gamma - \odot)}{\sin 1'} \qquad \gamma = tg\,\frac{1}{2}\,z$$

$$cotg\, z = \frac{\cos\beta \sin(\lambda - \odot')}{R} \qquad \begin{matrix} \Omega = \odot \text{ при } \sin\beta > 0 \\ \Omega = 180° + \odot \text{ при } \sin\beta < 0 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{2q}\,\sin i = \pm\,\gamma\, R \sin\beta \\ \sqrt{2q}\,\cos i = 1 + \gamma\, R\cos\beta \sin(\lambda - \odot) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} + \text{ при } \sin\beta > 0 \\ - \text{ при } \sin\beta < 0. \end{matrix}$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,v = \frac{\gamma R \cos\beta \cos(\lambda - \odot) - \sin(\odot' - \odot)}{\sqrt{2q}}$$

$$\pi = 180° + \odot - v.$$

УПРАЖНЕНІЯ.

Задача № 21. Опредѣлить элементы метеорнаго потока, который наблюдается 29 іюля и радіантъ котораго опредѣляется координатами: іюля 29,5 $\alpha = 338°$ $\delta = -28°$, причемъ эти координаты относятся къ среднему равноденствію 1865 года.

Рѣшеніе. Прежде всего изъ Berliner Astronomisches Jahrbuch'a находимъ:

$$\odot = 125°48' \qquad \log R = 0{,}0065.$$

Далѣе вычисляемъ λ и β:

$$\lambda = 329°5' \qquad \beta = -17°24'.$$

Дальнѣйшія вычисленія располагаемъ по слѣдующей схемѣ:

$t - 1850$	15,6
Γ	280°37′
$\Gamma - \odot$	154°49′
$\sin(\Gamma - \odot)$	9,6289
$\odot' - \odot$	24′,5
$\odot'$	126°12′,5
$\lambda - \odot'$	202°52′,5
$\sin(\lambda - \odot')$	$9{,}5896_n$
$\cos\beta$	9,9796
доп. $\log R$	9,9935
$cotg\, z$	$9{,}5627_n$
z	110°4′,1
$\frac{1}{2}z$	55°2′,0
γ	0,1553

☊	305°48'.0
$\lambda - \odot$	203°17',0
$\sin\beta$	$9,4757_n$
γR	0,1618
$\sin(\lambda - \odot)$	$9,5969_n$
$\gamma R \cos\beta$	0,1414
$\gamma R \cos\beta \sin(\lambda - \odot)$	$9,7383_n$
$\sqrt{2q}\sin i$	9,6375
$\cos i$	9,8584
$\sqrt{2q}\cos i$	9,6557
$tg\, i$	9,9818
i	43°48',0

$\sqrt{2q}$	9,7973
$2q$	9,5946
q	9,2936
$\cos(\lambda - \odot)$	$9,9631_n$
$\gamma R \cos\beta \cos(\lambda - \odot)$	$0,1045_n$
$\sin(\odot' - \odot)$	7,8529
Add	0,0024
$\sqrt{2q}\; tg\frac{1}{2}v$	$0,1069_n$
$tg\frac{1}{2}v$	$0,3096_n$
$\frac{1}{2}v$	— 63°53',1
v	— 127°46',2
π	73°34',2

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующіе элементы:

$$☊ = 305°,8$$
$$i = 43,8$$
$$\pi = 73,6$$
$$\log q = 9,294.$$

ГЛАВА X.

Опредѣленіе эллиптической орбиты по тремъ наблюденіямъ.

§ 60. Основныя уравненія.

Для опредѣленія эллиптической орбиты необходимо имѣть, какъ это было указано въ главѣ VIII, три наблюденія небеснаго тѣла. Способъ опредѣленія эллиптической орбиты по тремъ наблюденіямъ былъ данъ знаменитымъ Гауссомъ и изложенъ имъ въ его классическомъ сочиненіи «Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. 1809». Позднѣйшіе изслѣдователи вносили въ способъ Гаусса нѣкоторыя видоизмѣненія съ цѣлію облегченія вычисленій.

Задача объ опредѣленіи орбиты по тремъ наблюденіямъ, какъ мы знаемъ, распадается на двѣ: на задачу объ опредѣленіи геоцентрическихъ разстояній небеснаго тѣла и на задачу объ опредѣленіи самихъ элементовъ орбиты. Займемся первой изъ этихъ задачъ.

Уравненія, являющіяся основными при опредѣленіи геоцентрическихъ разстояній, имѣютъ видъ:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} x_1 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} x_3 = x_2$$

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} y_1 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} y_3 = y_2$$

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} z_1 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} z_3 = z_2.$$

Мы знаемъ, что геліоцентрическія координаты небеснаго тѣла выражаются черезъ его геоцентрическія координаты и черезъ геоцентрическія координаты солнца слѣдующими формулами:

$$x = \xi - X,$$

$$y = \eta - Y,$$

$$z = \zeta - Z.$$

Называя буквами ρ, λ и β геоцентрическія разстояніе, долготу и широт небеснаго тѣла, буквами R и L—разстояніе отъ земли до солнца и геоцентрическую долготу этого свѣтила и принимая для упрощенія выкладокъ широту солнца равною нулю, вмѣсто предыдущихъ уравненій получаемъ:

$$x = \rho \cos\lambda \cos\beta - R \cos L,$$
$$y = \rho \sin\lambda \cos\beta - R \sin L,$$
$$z = \rho \sin\beta.$$

Примѣняя наши формулы къ моментамъ t_1, t_2 и t_3, въ которые произведены три наблюденія, необходимыя для опредѣленія орбиты, получимъ координаты x, y, z со значками. Подставляя ихъ выраженія въ основныя уравненія, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\{\rho_1 \cos\lambda_1 \cos\beta_1 - R_1 \cos L_1\} + \\
&+ \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\{\rho_3 \cos\lambda_3 \cos\beta_3 - R_3 \cos L_3\} = \\
&\qquad = \rho_2 \cos\lambda_2 \cos\beta_2 - R_2 \cos L_2 \\
&\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\{\rho_1 \sin\lambda_1 \cos\beta_1 - R_1 \sin L_1\} + \\
&+ \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\{\rho_3 \sin\lambda_3 \cos\beta_3 - R_3 \sin L_3\} = \\
&\qquad = \rho_2 \sin\lambda_2 \cos\beta_2 - R_2 \sin L_2 \\
&\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\rho_1 \sin\beta_1 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\rho_3 \sin\beta_3 = \rho_2 \sin\beta_2.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (211)$$

§ 61. Опредѣленіе геоцентрическаго разстоянія ρ_2 въ зависимости отъ отношеній площадей треугольниковъ.

Приступимъ же къ рѣшенію уравненій (211), считая пока отношенія площадей треугольниковъ извѣстными. Мы можемъ ихъ рѣшить слѣдующимъ образомъ. Неизвѣстныя ρ_1 и ρ_3 можно выразить въ зависимости отъ неизвѣстной ρ_2 и отъ отношеній площадей треугольниковъ, а неизвѣстную ρ_2 только въ зависимости отъ отношеній площадей треугольниковъ. Займемся сначала выводомъ формулы, дающей зависимость ρ_2 отъ отношеній площадей треугольниковъ. Для этого исключимъ изъ уравненій (211) неизвѣстныя ρ_1 и ρ_3. Результатъ исключенія будетъ содержать одну неизвѣстную ρ_2. Это и будетъ искомая зависимость.

Исключеніе неизвѣстныхъ ρ_1 и ρ_3 изъ уравненій (211) мы будемъ производить по способу неопредѣленныхъ множителей.

Умножимъ для этого первое уравненіе на нѣкоторый множитель h_1, второе уравненіе на h_2 и третье на h_3 и сложимъ ихъ. Затѣмъ опредѣлимъ множители h_1, h_2 и h_3 такъ, чтобы въ полученномъ черезъ такое сложеніе уравненіи коэффиціенты при ρ_1 и ρ_3 были равны нулю.

Такимъ образомъ получаемъ:

$$h_1 \cos\lambda_1 \cos\beta_1 + h_2 \sin\lambda_1 \cos\beta_1 + h_3 \sin\beta_1 = 0$$
$$h_1 \cos\lambda_3 \cos\beta_3 + h_2 \sin\lambda_3 \cos\beta_3 + h_3 \sin\beta_3 = 0.$$

Изъ этихъ уравненій сами множители, очевидно, опредѣлены быть не могутъ, но мы можемъ написать, чему эти множители должны быть пропорціональны. Имѣемъ:

$$\frac{h_1}{\sin\beta_3 \cos\beta_1 \sin\lambda_1 - \sin\beta_1 \cos\beta_3 \sin\lambda_3} =$$

$$= \frac{h_2}{\sin\beta_1 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 - \sin\beta_3 \cos\beta_1 \cos\lambda_1} = \frac{h_3}{\cos\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)}.$$

Въ виду того, что для исключенія неизвѣстныхъ ρ_1 и ρ_3 изъ уравненій (211) значеній самихъ множителей h_1, h_2, h_3 знать не надо, и эти множители можно замѣнить любыми величинами, пропорціональными знаменателямъ только что написанныхъ дробей, мы для простоты примемъ коэффиціентъ пропорціональности равнымъ единицѣ.

Тогда будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = \sin\beta_3 \cos\beta_1 \sin\lambda_1 - \sin\beta_1 \cos\beta_3 \sin\lambda_3 \\ h_2 = \sin\beta_1 \cos\beta_3 \cos\lambda_3 - \sin\beta_3 \cos\beta_1 \cos\lambda_1 \\ h_3 = \cos\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_1). \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (212)$$

Послѣ этого результатъ исключенія ρ_1 и ρ_3 изъ уравненій (211) напишемъ въ видѣ:

$$K\rho_2 + \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} A - B + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} C = 0.$$

Оставляя въ лѣвой части только членъ съ ρ_2, имѣемъ:

$$K\rho_2 = -\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} A + B - \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (213)$$

Легко находимъ, что коэффиціентъ K опредѣляется уравненіемъ:

$$K = \sin\beta_2 \cos\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda - \lambda_1) - \sin\beta_3 \cos\beta_1 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) -$$
$$- \sin\beta_1 \cos\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (214)$$

Формулы для опредѣленія коэффиціентовъ A, B, C имѣютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} A &= R_1 \sin\beta_3 \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1) - R_1 \sin\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_1) \\ B &= R_2 \sin\beta_3 \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2) - R_2 \sin\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) \\ C &= R_3 \sin\beta_3 \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_3) - R_3 \sin\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_3). \end{aligned}\right\} \quad (215)$$

Для вычисленія входящихъ въ уравненіе (213) отношеній площадей треугольниковъ служатъ формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 - \frac{1}{6}\,\frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{r_2^3} + \ldots\right] \\ \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1 - \frac{1}{6}\,\frac{\tau_3^2 - \tau_2^2}{r_2^3} + \ldots\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (216)$$

Этими формулами, въ которыхъ отброшены члены высшихъ порядковъ, мы можемъ пользоваться лишь тогда, когда промежутки времени между наблюденіями достаточно малы, что на практикѣ и бываетъ при первыхъ опредѣленіяхъ орбитъ вновь открытыхъ небесныхъ тѣлъ. Въ этомъ случаѣ величины τ_1, τ_2 и τ_3 суть малыя величины перваго порядка.

Въ отношеніяхъ площадей треугольниковъ члены второго порядка зависятъ отъ r_2. Отъ этой же неизвѣстной, равно какъ отъ $\frac{dr_2}{d\tau}$, зависятъ и члены высшаго порядка, въ формулахъ (216) не выписанные.

§ 62. Опредѣленіе порядка коэффиціентовъ K, A, B и C.

Опредѣленіе ρ_2 по уравненію (213) есть задача трудная, такъ какъ помимо того, что во вторыя части этихъ уравненій входитъ черезъ посредство отношеній площадей треугольниковъ неизвѣстная r_2, эти вторыя части заключаютъ дѣлителемъ малую величину K. Можно показать, что коэффиціентъ K есть малая величина третьяго порядка, а коэффиціенты A, B, C перваго порядка относительно τ_1, τ_2, τ_3.

Въ такомъ случаѣ очевидно, что въ формулахъ (216) уже съ самаго начала должны быть удержаны члены второго порядка, зависящіе отъ неизвѣстной r_2.

Обратимся сначала къ коэффиціентамъ A, B, C.

Въ самомъ дѣлѣ, каждый изъ нихъ имѣетъ видъ

$$a \sin(\lambda_1 - L_k) - b \sin(\lambda_3 - L_k),$$

гдѣ

$$a = R_k \sin\beta_3 \cos\beta_1, \qquad b = R_k \sin\beta_1 \cos\beta_3,$$

причемъ k равняется или 1, или 2, или 3.

Но λ_3 можно замѣнить выраженіемъ $\lambda_1 + (\lambda_3 - \lambda_1)$. Тогда

$$a \sin(\lambda_1 - L_k) - b \sin[(\lambda_1 - L_k) + (\lambda_3 - \lambda_1)] =$$
$$= a \sin(\lambda_1 - L_k) - b \sin(\lambda_1 - L_k)\cos(\lambda_3 - \lambda_1) - b\cos(\lambda_1 - L_k)\sin(\lambda_3 - \lambda_1).$$

Такъ какъ $\sin(\lambda_3 - \lambda_1)$ есть малая величина того же порядка, какъ τ_1, τ_2, τ_3, то мы можемъ принять $\cos(\lambda_3 - \lambda_1) = 1$. Тогда

$$a \sin(\lambda_1 - L_k) - b \sin(\lambda_3 - L_k) =$$
$$= (a - b) \sin(\lambda_1 - L_k) - b \cos(\lambda_1 - L_k) \sin(\lambda_3 - \lambda_1).$$

Наконецъ, нетрудно убѣдиться, что $a - b = R_k \sin(\beta_3 - \beta_1)$, гдѣ R_k есть конечная величина, а $\sin(\beta_3 - \beta_1)$ есть малая величина перваго порядка относительно τ_1, τ_2, τ_3. Окончательно имѣемъ:

$$a \sin(\lambda_1 - L_k) - b \sin(\lambda_3 - L_k) =$$
$$= R_k \sin(\beta_3 - \beta_1) \sin(\lambda_1 - L_k) - b \cos(\lambda_1 - L_k) \sin(\lambda_3 - \lambda_1),$$

откуда и видно, что A, B, C суть малыя величины перваго порядка относительно τ_1, τ_2, τ_3.

Для доказательства того, что K есть величина третьяго порядка, преобразуемъ уравненіе (213), служащее для опредѣленія ρ_2.

Съ этой цѣлью напишемъ слѣдующія два тождества:

$$\sin(A - B) \sin(\lambda_1 - C) - \sin(A - C) \sin(\lambda_1 - B) +$$
$$+ \sin(B - C) \sin(\lambda_1 - A) = 0$$
$$\sin(A - B) \sin(\lambda_3 - C) - \sin(A - C) \sin(\lambda_3 - B) +$$
$$+ \sin(B - C) \sin(\lambda_3 - A) = 0,$$

въ справедливости которыхъ весьма легко убѣдиться.

Умножимъ первое изъ этихъ тождествъ на $R_1 R_2 R_3 \sin\beta_3 \cos\beta_1$, а второе на $R_1 R_2 R_3 \sin\beta_1 \cos\beta_3$ и затѣмъ положимъ въ обоихъ тождествахъ

$$A = L_3, \quad B = L_2, \quad C = L_1.$$

Тогда получаемъ:

$$R_1 R_2 R_3 \sin\beta_3 \cos\beta_1 \{\sin(L_3 - L_2) \sin(\lambda_1 - L_1) - \sin(L_3 - L_1) \sin(\lambda_1 - L_2) +$$
$$+ \sin(L_2 - L_1) \sin(\lambda_1 - L_3)\} = 0$$
$$R_1 R_2 R_3 \sin\beta_1 \cos\beta_3 \{\sin(L_3 - L_2) \sin(\lambda_3 - L_1) - \sin(L_3 - L_1) \sin(\lambda_3 - L_2) +$$
$$+ \sin(L_2 - L_1) \sin(\lambda_3 - L_3)\} = 0.$$

Введемъ сюда площади треугольниковъ, образованныхъ попарно радіусами-векторами земли R_1, R_2 и R_3, а именно:

$$\left.\begin{aligned} [R_1 R_2] &= \frac{1}{2} R_1 R_2 \sin(L_2 - L_1) \\ [R_1 R_3] &= \frac{1}{2} R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1) \\ [R_2 R_3] &= \frac{1}{2} R_2 R_3 \sin(L_3 - L_2). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (217)$$

Тогда, по сокращенiи на $\frac{1}{2}$, будемъ имѣть:

$$R_1 \sin\beta_3 \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1) \cdot [R_2 R_3] - R_2 \sin\beta_3 \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_2) \cdot [R_1 R_3] + $$
$$+ R_3 \sin\beta_3 \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_3) \cdot [R_1 R_2] = 0$$

$$R_1 \sin\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_1) \cdot [R_2 R_3] - R_2 \sin\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) \cdot [R_1 R_3] + $$
$$+ R_3 \sin\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_3) \cdot [R_1 R_2] = 0.$$

Раздѣляя оба эти тождества на $[R_1 R_3]$ и вычитая второе изъ перваго, мы на основанiи уравненiй (215) получимъ:

$$\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} A - B + \frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} C = 0.$$

Прибавляя этотъ трехчленъ, равный нулю, къ правой части уравненiя (213), мы преобразуемъ его такъ:

$$K\rho_2 = \left\{\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} - \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}\right\} A + \left\{\frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} - \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]}\right\} C \quad . \quad . \quad . \quad (218$$

Имѣя въ виду уравненiя (216), а также слѣдующiя уравненiя:

$$\frac{[R_2 R_3]}{[R_1 R_3]} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 - \frac{1}{6}\,\frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{R_2^3} + \ldots\right]$$

$$\frac{[R_1 R_2]}{[R_1 R_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1 - \frac{1}{6}\,\frac{\tau_3^2 - \tau_2^2}{R_2^3} + \ldots\right],$$

которыя можемъ написать по аналогiи, получаемъ:

$$K\rho_2 = \frac{1}{6\tau_2}\left[\tau_1(\tau_1^2 - \tau_2^2) A + \tau_3(\tau_3^2 - \tau_2^2) C\right]\left[\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (219$$

Выше мы видѣли, что A, B и C суть величины перваго порядка относительно τ_1, τ_2, τ_3. Теперь покажемъ, что разности $A - B$ и $C - B$ суть величины второго порядка. Каждая изъ величинъ A, B и C была приведена нами къ виду:

$$R_k \sin(\beta_3 - \beta_1) \sin(\lambda_1 - L_k) - b \cos(\lambda_1 - L_k) \sin(\lambda_3 - \lambda_1),$$

гдѣ

$$b = R_k \cos\beta_3 \sin\beta_1.$$

Значитъ вмѣсто предыдущаго выраженiя можемъ написать:

$$R_k \sin(\beta_3 - \beta_1) \sin(\lambda_1 - L_k) - R_k \cos\beta_3 \sin\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_k) \sin(\lambda_3 - \lambda_1),$$

гдѣ

$$\sin(\beta_3 - \beta_1) \text{ и } \sin(\lambda_3 - \lambda_1)$$

суть малыя величины перваго порядка. Чтобы перейти отъ A къ B или

отъ B къ C, надо въ предыдущемъ выраженіи измѣнить значокъ k у R и L. Измѣнимъ его на l, такъ что получимъ:

$$R_l \sin(\beta_3 - \beta_1) \sin(\lambda_1 - L_l) - R_1 \cos\beta_3 \sin\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_l) \sin(\lambda_3 - \lambda_1).$$

Составимъ теперь разность между этимъ выраженіемъ и предыдущимъ. Тогда получимъ:

$$[R_l \sin(\lambda_1 - L_l) - R_k \sin(\lambda_1 - L_k)] \sin(\beta_3 - \beta_1) -$$
$$- \cos\beta_3 \sin\beta_1 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) [R_l \cos(\lambda_1 - L_l) - R_k \cos(\lambda_1 - L_k)].$$

При малыхъ промежуткахъ времени разности

$$[R_l \sin(\lambda_1 - L_l) - R_k \sin(\lambda_1 - L_k)] \text{ и } [R_l \cos(\lambda_1 - L_l) - R_k \cos(\lambda_1 - L_k)],$$

очевидно, суть малыя величины перваго порядка. Отсюда уже нетрудно заключить, что A и C отличаются отъ B на малыя величины второго порядка относительно τ_1, τ_2, τ_3.

Поэтому въ уравненіи (219) мы можемъ, пренебрегая малыми величинами четвертаго порядка, замѣнить A и C коэффиціентомъ B. Тогда уравненіе (219) обратится въ такое:

$$K\rho_2 = \frac{B}{6\tau_2}\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)[\tau_1(\tau_1^2 - \tau_2^2) + \tau_3(\tau_3^2 - \tau_2^2)].$$

Коэффиціентъ, стоящій въ квадратныхъ скобкахъ, при помощи соотношенія

$$\tau_2 = \tau_1 + \tau_3$$

преобразовывается такимъ образомъ:

$$\tau_1(\tau_1^2 - \tau_2^2) + \tau_3(\tau_3^2 - \tau_2^2) = \tau_1(\tau_1 + \tau_2)(\tau_1 - \tau_2) + \tau_3(\tau_3 + \tau_2)(\tau_3 - \tau_2) =$$
$$= -\tau_1(\tau_1 + \tau_2)\tau_3 - \tau_3(\tau_3 + \tau_2)\tau_1 = -\tau_1^2\tau_3 - \tau_1\tau_2\tau_3 - \tau_3^2\tau_1 - \tau_1\tau_2\tau_3 =$$
$$= -2\tau_1\tau_2\tau_3 - \tau_1\tau_3(\tau_1 + \tau_3) = -2\tau_1\tau_2\tau_3 - \tau_1\tau_2\tau_3 = -3\tau_1\tau_2\tau_3.$$

Послѣ этихъ преобразованій уравненіе для опредѣленія ρ_2 принимаетъ такой видъ:

$$K\rho_2 = \frac{\tau_1\tau_3}{2} B \left\{\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}\right\}.$$

Такъ какъ ρ_2 и $\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_2^3}$ суть конечныя величины, а B — величина перваго порядка, то изъ этого уравненія мы легко заключаемъ, что коэффиціентъ K есть малая величина третьяго порядка относительно τ_1, τ_2, τ_3.

§ 63. Геометрическое значеніе коэффиціента K.

Постараемся теперь выяснить геометрическое значеніе коэффиціента K и вмѣстѣ съ тѣмъ представимъ его въ другомъ болѣе простомъ видѣ. Для коэффиціента K мы имѣли такое выраженіе:

$$K = \sin\beta_2 \cos\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) - \sin\beta_3 \cos\beta_1 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) -$$
$$- \sin\beta_1 \cos\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_2).$$

Вполнѣ очевидно, что вообще три положенія небеснаго тѣла не лежатъ въ одной плоскости, проходящей черезъ центръ земли, или, что то же, на окружности одного большого круга, расположенной на сферѣ, центръ которой совпадаетъ съ центромъ земли, хотя въ частномъ случаѣ, какъ мы увидимъ ниже, это можетъ имѣть мѣсто. Пока же мы будемъ разсматривать общій случай.

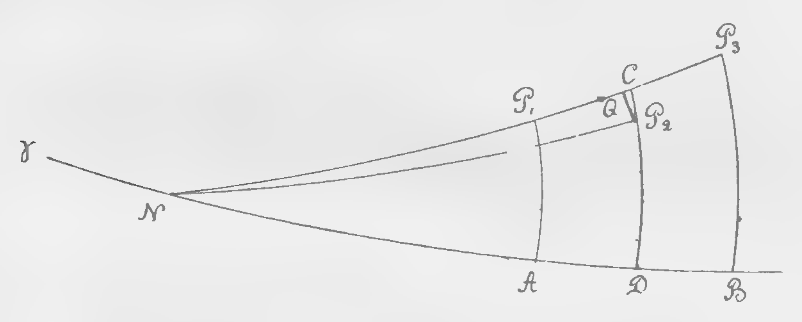


Рис. 36.

На сферѣ, описанной изъ центра земли радіусомъ, равнымъ единицѣ, проведемъ черезъ первое и третье положенія небеснаго тѣла окружность большого круга NP_1P_3 (рис. 36), опредѣляемую долготой восходящаго узла $\Pi = \gamma N$ и наклонностью къ эклиптикѣ $J = \angle P_3NB$. Сначала выведемъ формулы для опредѣленія J и Π. Для этого разсмотримъ сферическіе треугольники NP_1A и NP_3B. Въ первомъ изъ нихъ имѣемъ:

$$NP_1 = u_1', \; NA = \lambda_1 - \Pi, \; P_1A = \beta_1, \; \angle P_1NA = J, \; \angle NAP_1 = 90^\circ.$$

Во второмъ треугольникѣ имѣемъ:

$$NP_3 = u_3', \; NB = \lambda_3 - \Pi, \; P_3B = \beta_3, \; \angle P_3NB = J, \; \angle NBP_3 = 90^\circ.$$

Примѣняя къ этимъ треугольникамъ основныя формулы сферической тригонометріи, получаемъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos u_1' = \cos(\lambda_1 - \Pi)\cos\beta_1 & \cos u_3' = \cos(\lambda_3 - \Pi)\cos\beta_3 \\ \sin u_1' \cos J = \sin(\lambda_1 - \Pi)\cos\beta_1 & \sin u_3' \cos J = \sin(\lambda_3 - \Pi)\cos\beta_3 \\ \sin u_1' \sin J = \sin\beta_1 & \sin u_3' \sin J = \sin\beta_3. \end{array}\right\} \quad (220)$$

Изъ этихъ формулъ легко выводимъ:

$$tg\, J\, sin\, (\lambda_1 - \Pi) = tg\, \beta_1$$

$$tg\, J\, sin\, (\lambda_3 - \Pi) = tg\, \beta_3.$$

Замѣнимъ $\lambda_3 - \Pi$ во второй изъ этихъ формулъ такимъ выраженіемъ:

$$\lambda_3 - \Pi = (\lambda_1 - \Pi) + (\lambda_3 - \lambda_1).$$

Тогда получаемъ:

$$tg\, J\, sin\, (\lambda_1 - \Pi)\, cos\, (\lambda_3 - \lambda_1) + tg\, J\, cos\, (\lambda_1 - \Pi)\, sin\, (\lambda\ - \lambda_1) = tg\, \beta_3.$$

Замѣняя $tg\, J\, sin\, (\lambda_1 - \Pi)$ равнымъ ему выраженіемъ $tg\, \beta_1$, окончательно для опредѣленія J и Π будемъ имѣть формулы:

$$tg\, J\, sin\, (\lambda_1 - \Pi) = tg\, \beta_1,$$

$$tg\, J\, cos\, (\lambda_1 - \Pi) = \frac{tg\, \beta_3 - tg\, \beta_1\, cos\, (\lambda_3 - \lambda_1)}{sin\, (\lambda_3 - \lambda_1)}.$$

Уголъ J можетъ заключаться въ предѣлахъ отъ 0° до 180°. Условившись считать $tg\, J$ того же знака, какъ $sin\, (\lambda_3 - \lambda_1)$, мы по этимъ формуламъ безъ всякой двойственности опредѣлимъ углы J и Π.

Для контроля произведенныхъ вычисленій служитъ формула:

$$tg\, J\, sin\, (\lambda_3 - \Pi) = tg\, \beta_3.$$

Теперь преобразуемъ вышенаписанное выраженіе для K, сдѣлавъ въ немъ слѣдующія замѣны:

$$\lambda_3 - \lambda_1 = (\lambda_3 - \Pi) - (\lambda_1 - \Pi)$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = (\lambda_2 - \Pi) - (\lambda_1 - \Pi)$$

$$\lambda_3 - \lambda_2 = (\lambda_3 - \Pi) - (\lambda_2 - \Pi).$$

Тогда коэффиціентъ K приметъ такой видъ:

$$K = sin\, \beta_2\, cos\, \beta_1\, cos\, \beta_3\, sin\, (\lambda_3 - \Pi)\, cos\, (\lambda_1 - \Pi) -$$
$$- sin\, \beta_2\, cos\, \beta_1\, cos\, \beta_3\, cos\, (\lambda_3 - \Pi)\, sin\, (\lambda_1 - \Pi) -$$
$$- sin\, \beta_3\, cos\, \beta_1\, cos\, \beta_2\, sin\, (\lambda_2 - \Pi)\, cos\, (\lambda_1 - \Pi) +$$
$$+ sin\, \beta_3\, cos\, \beta_1\, cos\, \beta_2\, cos\, (\lambda_2 - \Pi)\, sin\, (\lambda_1 - \Pi) -$$
$$- sin\, \beta_1\, cos\, \beta_2\, cos\, \beta_3\, sin\, (\lambda_3 - \Pi)\, cos\, (\lambda_2 - \Pi) +$$
$$+ sin\, \beta_1\, cos\, \beta_2\, cos\, \beta_3\, cos\, (\lambda_3 - \Pi)\, sin\, (\lambda_2 - \Pi).$$

Принимая во вниманіе уравненія (220), выраженіе коэффиціента K преобразовываемъ такъ:

$$K = sin\, \beta_2\, sin\, u_3'\, cos\, J\, cos\, u_1' - sin\, \beta_2\, sin\, u_1'\, cos\, J\, cos\, u_3' -$$
$$- sin\, u_3'\, sin\, J\, cos\, \beta_2\, sin\, (\lambda_2 - \Pi)\, cos\, u_1' +$$

$$+ \sin u_3' \sin J \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - \Pi) \sin u_1' \cos J -$$
$$- \sin u_1' \sin J \sin u_3' \cos J \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - \Pi) +$$
$$+ \sin u_1' \sin J \cos u_3' \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - \Pi).$$

Здѣсь четвертый членъ сокращается съ пятымъ. Затѣмъ, соединяя первый членъ со вторымъ и третій съ послѣднимъ, получаемъ:

$$K = \sin \beta_2 \cos J \sin (u_3' - u_1') - \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - \Pi) \sin J \sin (u_3' - u_1').$$

Наконецъ

$$K = \sin (u_3' - u_1') \{\sin \beta_2 \cos J - \cos \beta_2 \sin (\lambda_2 - \Pi) \sin J\}.$$

Опустимъ теперь изъ второго положенія небеснаго тѣла перпендикуляръ P_2Q на дугу NP_1P_3. Назовемъ этотъ перпендикуляръ буквой p_2. Далѣе, обозначимъ уголъ P_2ND буквой i' и дугу NP_2 буквой u_2'. Тогда изъ треугольника NQP_2, въ которомъ уголъ

$$\angle P_2NQ = J - i',$$

примѣняя формулу синусовъ, имѣемъ:

$$\sin p_2 = \sin u_2' \sin (J - i').$$

Раскрывая $\sin (J - i')$, находимъ:

$$\sin p_2 = \sin u_2' \sin J \cos i' - \sin u_2' \cos J \sin i'.$$

Далѣе разсмотримъ сферическій треугольникъ NP_2D, въ которомъ имѣемъ:

$$NP_2 = u_2',\ P_2D = \beta_2,\ ND = \lambda_2 - \Pi,\ \angle P_2ND = i',\ \angle NDP_2 = 90°.$$

Примѣняя къ этому треугольнику основныя формулы сферической тригонометріи, получаемъ:

$$\cos u_2' = \cos (\lambda_2 - \Pi) \cos \beta_2.$$
$$\sin u_2' \cos i' = \sin (\lambda_2 - \Pi) \cos \beta_2,$$
$$\sin u_2' \sin i' = \sin \beta_2.$$

При помощи этихъ соотношеній выраженіе для $\sin p_2$ преобразовывается въ такое:

$$\sin p_2 = \sin (\lambda_2 - \Pi) \cos \beta_2 \sin J - \sin \beta_2 \cos J.$$

Послѣ этого выраженіе коэффиціента K принимаетъ слѣдующій простой видъ:

$$K = - \sin (u_3' - u_1') \sin p_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (221)$$

Замѣтимъ, что если бы точка P_2 находилась по другую сторону дуги P_1P_3, т. е. выше этой дуги, а не ниже, какъ на рис. 36, то мы получили бы:

$$K = sin\,(u'_3 - u'_1)\,sin\,p_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (222)$$

и

$$sin\,p_2 = sin\,\beta_2\,cos\,J - sin\,(\lambda_2 - \Pi)\,cos\,\beta_2\,sin\,J.$$

Условившись считать перпендикуляръ p_2 положительнымъ, когда точка P_2 лежитъ выше дуги P_1P_3, и отрицательнымъ, когда точка P_2 лежитъ ниже этой дуги, мы, очевидно, въ формулѣ (222) будемъ имѣть общее выраженіе коэффиціента K.

Изъ уравненія (222) мы выводимъ такое заключеніе. Если изъ центра земли опишемъ сферу радіусомъ, равнымъ единицѣ, то отношеніе $\frac{K}{sin\,(u'_3 - u'_1)}$ есть синусъ сферическаго перпендикуляра p_2, опущеннаго на этой сферѣ изъ второго положенія небеснаго тѣла на дугу большого круга, проходящаго черезъ первое и третье положеніе этого тѣла.

Изъ того же уравненія (222) мы можемъ вывести еще слѣдующее весьма важное заключеніе. Если всѣ три положенія небеснаго тѣла лежатъ на окружности одного большого круга, расположенной на сферѣ, центръ которой совпадаетъ съ центромъ земли, то $p_2 = 0$ и слѣдовательно, $K = 0$, и тогда опредѣлить орбиту по такимъ тремъ наблюденнымъ положеніямъ небеснаго тѣла нельзя. Это и есть тотъ частный случай, о которомъ было упомянуто выше. Напримѣръ, K равно нулю тогда, когда небесное тѣло движется въ плоскости эклиптики, т. е. когда

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.$$

§ 64. Геометрическое значеніе коэффиціентовъ A, B и C.

Выяснимъ теперь геометрическое значеніе коэффиціентовъ A, B и C. Обратимся прежде всего къ коэффиціенту B. Этотъ коэффиціентъ выражается формулой:

$$B = R_2\,sin\,\beta_3\,cos\,\beta_1\,sin\,(\lambda_1 - L_2) - R_2\,sin\,\beta_1\,cos\,\beta_3\,sin\,(\lambda_3 - L_2).$$

Подобно предыдущему, сдѣлаемъ слѣдующую замѣну:

$$\lambda_1 - L_2 = (\lambda_1 - \Pi) - (L_2 - \Pi)$$
$$\lambda_3 - L_2 = (\lambda_3 - \Pi) - (L_2 - \Pi).$$

Тогда коэффиціенту B придадимъ видъ

$$B = R_2\,sin\,\beta_3\,cos\,\beta_1\,sin\,(\lambda_1 - \Pi)\,cos\,(L_2 - \Pi) -$$
$$- R_2\,sin\,\beta_3\,cos\,\beta_1\,cos\,(\lambda_1 - \Pi)\,sin\,(L_2 - \Pi) -$$
$$- R_2\,sin\,\beta_1\,cos\,\beta_3\,sin\,(\lambda_3 - \Pi)\,cos\,(L_2 - \Pi) +$$
$$+ R_2\,sin\,\beta_1\,cos\,\beta_3\,cos\,(\lambda_3 - \Pi)\,sin\,(L_2 - \Pi).$$

По формуламъ (220) преобразовываемъ выраженіе для B такъ:

$$B = R_2 \sin u'_3 \sin J \sin u'_1 \cos J \cos (L_2 - \Pi) -$$
$$- R_2 \sin u'_3 \sin J \cos u'_1 \sin (L_2 - \Pi) -$$
$$- R_2 \sin u'_1 \sin J \sin u'_3 \cos J \cos (L_2 - \Pi) +$$
$$+ R_2 \sin u'_1 \sin J \cos u'_3 \sin (L_2 - \Pi).$$

Сокращая первый членъ съ третьимъ и соединяя второй съ четвертымъ находимъ:

$$B = - R_2 \sin (L_2 - \Pi) \sin J \sin (u'_3 - u'_1).$$

Совершенно подобнымъ же образомъ найдемъ выраженія коэффиціентовъ A и C, а именно:

$$\left.\begin{aligned} A &= - R_1 \sin (L_1 - \Pi) \sin J \sin (u'_3 - u'_1) \\ C &= - R_3 \sin (L_3 - \Pi) \sin J \sin (u'_3 - u'_1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (223)$$

Положимъ, что на рис. 37 второе положеніе солнца на эклиптикѣ есть $\odot_2$. Пусть NP_1P_3B есть окружность большого круга, проходящая черезъ первое и третье положенія небеснаго тѣла. Опустимъ изъ второго положенія солнца перпендикуляръ $\odot_2 G$ на эту окружность. Назовемъ этотъ перпендикуляръ буквой P_2. Разсмотримъ теперь сферическій треугольникъ $B\odot_2 G$, въ которомъ имѣемъ: $\odot_2 G = P_2$, $\odot_2 B = L_2 - 180° - \Pi$, $\angle \odot_2 BG = J$, $\angle BG\odot_2 = 90°$. Формула синусовъ въ примѣненіи къ этому треугольнику даетъ:

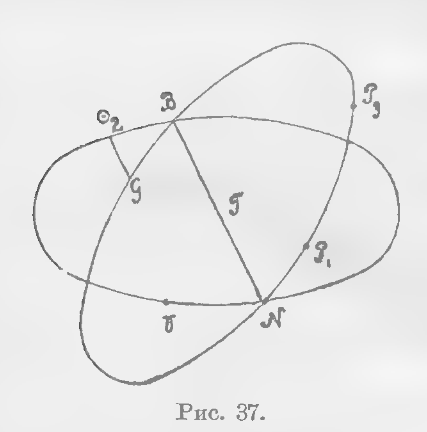


Рис. 37.

$$\sin P_2 = - \sin (L_2 - \Pi) \sin J.$$

Внося это въ формулу для B, получаемъ:

$$B = R_2 \sin P_2 \sin (u'_3 - u'_1).$$

Если бы второе положеніе солнца находилось справа отъ точки B, т. е. ниже окружности большого круга NP_1P_3B, а не выше, какъ это было въ только что разсмотрѣнномъ случаѣ, то мы получили бы формулу:

$$B_2 = - R_2 \sin P_2 \sin (u'_3 - u'_1).$$

Условившись опять считать P_2 положительнымъ, когда второе положеніе солнца находится выше окружности большого круга, проходящей

черезъ первое и третье положенія небеснаго тѣла, и отрицательнымъ, когда второе положеніе солнца находится ниже этой окружности, мы, очевидно, будемъ имѣть для B такую общую формулу:

$$B = R_2 \sin P_2 \sin (u'_3 - u'_1).$$

Эта формула намъ показываетъ, что отношеніе $\frac{B}{R_2 \sin (u'_3 - u'_1)}$ представляетъ на сферѣ, описанной изъ центра земли радіусомъ, равнымъ единицѣ, синусъ сферическаго перпендикуляра P_2, опущеннаго изъ второго положенія солнца на окружность большого круга, проходящую черезъ первое и третье положенія небеснаго тѣла.

§ 65. Вычисленіе геоцентрическаго разстоянія ρ_2.

Обратимся теперь къ уравненію, служащему для опредѣленія ρ_2, и напишемъ его въ видѣ:

$$K\rho_2 = \left\{\frac{[R_2R_3]}{[R_1R_3]} - \frac{[r_2r_3]}{[r_1r_3]}\right\} A + \left\{\frac{[R_1R_2]}{[R_1R_3]} - \frac{[r_1r_2]}{[r_1r_3]}\right\} C.$$

Введемъ для отношеній площадей треугольниковъ слѣдующія обозначенія:

$$\frac{[R_2R_3]}{[R_1R_3]} = N_1 \qquad \frac{[r_2r_3]}{[r_1r_3]} = n_1$$

$$\frac{[R_1R_2]}{[R_1R_3]} = N_3 \qquad \frac{[r_1r_2]}{[r_1r_3]} = n_3$$

и замѣнимъ коэффиціенты K, A и C ихъ выраженіями (222) и (223). Тогда, по сокращеніи на $\sin (u'_3 - u'_1)$, будемъ имѣть:

$$\rho_2 \sin p_2 = -(N_1 \quad n_1) R_1 \sin (L_1 - \Pi) \sin J - (N_3 - n_3) R_3 \sin (L_3 - \Pi) \sin J.$$

Для $\sin p_2$ мы имѣли формулу:

$$\sin p_2 = \sin \beta_2 \cos J - \sin (\lambda_2 - \Pi) \cos \beta_2 \sin J.$$

Эту формулу мы можемъ переписать въ видѣ:

$$\sin p_2 = \cos \beta_2 \sin J \, \frac{tg\, \beta_2 - \sin (\lambda_2 - \Pi)\, tg\, J}{tg\, J}.$$

Изъ треугольника NCD (рис. 36), обозначая сторону CD буквой β_0, легко получаемъ:

$$tg\, J \sin (\lambda_2 - \Pi) = tg\, \beta_0.$$

Поэтому будемъ имѣть:

$$\sin p_2 = \cos \beta_2 \sin J \, \frac{tg\, \beta_2 - tg\, \beta_0}{tg\, J}.$$

Послѣ этого уравненіе для опредѣленія ρ_2, по сокращеніи на $\sin J$, приметъ видъ:

$$\frac{tg\,\beta_2 - tg\,\beta_0}{tg\,J}\cos\beta_2 \cdot \rho_2 = -(N_1 - n_1)\,R_1 \sin(L_1 - \Pi) - (N_3 - n_3)\,R_3 \sin(L_3 - \Pi).$$

Введемъ теперь такія обозначенія:

$$d = \frac{tg\,J\ \sec\beta_2}{tg\,\beta_2 - tg\,\beta_0}$$

$$d_1 = dR_1 \sin(L_1 - \Pi)$$

$$d_2 = dR_2 \sin(L_2 - \Pi)$$

$$d_3 = dR_3 \sin(L_3 - \Pi).$$

Тогда будемъ имѣть:

$$\rho_2 = -d_1(N_1 - n_1) - d_3(N_3 - n_3).$$

Здѣсь величины N_1 и N_3 могутъ быть вычислены, очевидно, по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{R_2 \sin(L_3 - L_2)}{R_1 \sin(L_3 - L_1)} \\ N_3 &= \frac{R_2 \sin(L_2 - L_1)}{R_3 \sin(L_3 - L_1)}\,. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (224)$$

Нетрудно убѣдиться въ существованіи слѣдующей контрольной формулы:

$$d_2 = N_1 d_1 + N_3 d_3.$$

Вспоминая, что

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[1 - \frac{1}{6}\,\frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{r_2^3} + \dots\right]$$

$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\left[1 - \frac{1}{6}\,\frac{\tau_3^2 - \tau_2^2}{r_2^3} + \dots\right],$$

мы можемъ представить уравненіе для опредѣленія ρ_2 въ видѣ.

$$\rho_2 = -m + \frac{l}{r_2^3}\,, \quad \dots\dots\dots\dots (225)$$

гдѣ

$$m = d_1\left(N_1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) + d_3\left(N_3 - \frac{\tau_3}{\tau_2}\right)$$

$$l = -\frac{d_1\,\tau_1\,(\tau_1^2 - \tau_2^2)}{6\tau_2} - \frac{d_3\,\tau_3\,(\tau_3^2 - \tau_2^2)}{6\tau_2}.$$

Имѣя въ виду, что $\tau_1 + \tau_3 = \tau_2$, мы для опредѣленія коэффиціента l легко получаемъ такую формулу:

$$l = \frac{\tau_1 \tau_3}{6} \left[d_1 \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) + d_3 \left(1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}\right) \right].$$

Изъ разсмотрѣнія прямолинейнаго треугольника, вершинами котораго служатъ солнце S_2, небесное тѣло P_2 и земля T_2, мы можемъ выразить r_2 въ зависимости отъ ρ_2, именно:

$$r_2^2 = \rho_2^2 + R_2^2 - 2\rho_2 R_2 \cos \psi_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (226)$$

гдѣ ψ_2 есть уголъ при землѣ въ разсматриваемомъ треугольникѣ.

Покажемъ, какимъ образомъ можетъ быть опредѣленъ уголъ ψ_2, входящій въ это соотношеніе.

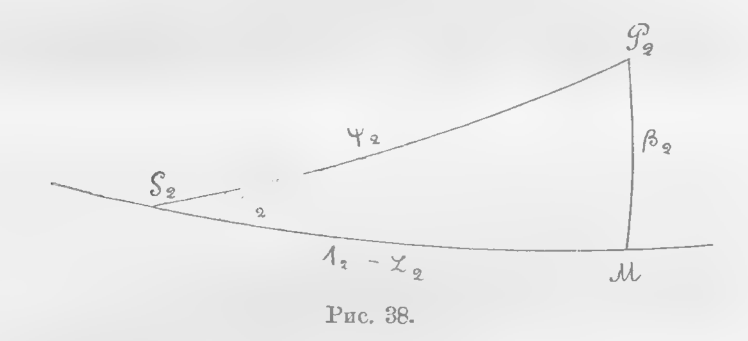


Рис. 38.

Для этого на сферѣ, описанной изъ центра земли радіусомъ, равнымъ единицѣ, разсмотримъ сферическій треугольникъ S_2P_2M (рис. 38), гдѣ S_2 есть положеніе солнца, P_2—положеніе небеснаго тѣла, S_2M—эклиптика, P_2M—кругъ широтъ. Въ этомъ треугольникѣ имѣемъ:

$$S_2P_2 = \psi_2,\ P_2M = \beta_2,\ S_2M = \lambda_2 - L_2,\ \angle S_2MP_2 = 90^\circ.$$

Назовемъ буквой P_2 уголъ P_2S_2M. Тогда, примѣняя къ этому треугольнику основныя формулы сферической тригонометріи, получаемъ:

$$\cos \psi_2 = \cos (\lambda_2 - L_2) \cos \beta_2$$
$$\sin \psi_2 \cos P_2 = \sin (\lambda_2 - L_2) \cos \beta_2$$
$$\sin \psi_2 \sin P_2 = \sin \beta_2.$$

Отсюда безъ всякой двойственности опредѣляемъ углы ψ_2 и P_2, причемъ ψ_2 всегда меньше 180°. Замѣтимъ, что уголъ P_2 самъ по себѣ намъ не нуженъ.

Исключая ρ_2 изъ уравненій (225) и (226), мы получимъ уравненіе восьмой степени съ одной неизвѣстной r_2.

Рѣшивъ это уравненіе относительно r_2, затѣмъ по уравненію (225) найдемъ и ρ_2. Однако непосредственное рѣшеніе указаннаго уравненія восьмой степени представляетъ значительныя затрудненія, и этотъ способъ опредѣленія r_2 и ρ_2 имѣетъ мало практическаго значенія.

§ 66. Уравненіе Гаусса и его рѣшеніе.

Гауссъ упомянутое въ предыдущемъ параграфѣ уравненіе восьмой степени замѣнилъ трансцендентнымъ уравненіемъ, допускающимъ удобное рѣшеніе.

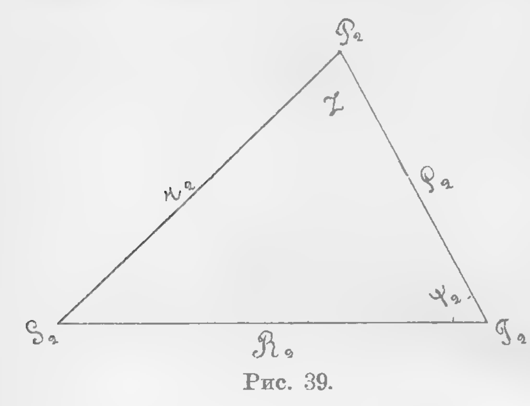


Рис. 39.

Введемъ, слѣдуя указанію Гаусса, новую неизвѣстную z, гдѣ z есть уголъ, составленный направленіями отъ небеснаго тѣла P_2 къ солнцу S_2 и къ землѣ T_2 (рис. 39). Разсматривая опять треугольникъ, вершинами котораго служатъ солнце S_2, небесное тѣло P_2 и земля T_2, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{R_2 \sin(\psi_2 + z)}{\sin z} \\ r_2 &= \frac{R_2 \sin\psi_2}{\sin z}. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (227)$$

Формулы для опредѣленія угла ψ_2 даны въ предыдущемъ параграфѣ.

Теперь введемъ при помощи соотношеній (227) неизвѣстную z въ уравненіе (225). Тогда будемъ имѣть:

$$R_2 \sin(\psi_2 + z) = -m \sin z + \frac{l \sin^4 z}{R_2{}^3 \sin^3\psi_2}$$

или

$$R_2 \sin\psi_2 \cos z + R_2 \cos\psi_2 \sin z = -m \sin z + \frac{l \sin^4 z}{R_2{}^3 \sin^3\psi_2}.$$

Перенося $-m \sin z$ въ лѣвую часть, имѣемъ:

$$R_2 \sin\psi_2 \cos z + (R_2 \cos\psi_2 + m) \sin z = \frac{l}{R_2{}^3 \sin^3\psi_2} \sin^4 z.$$

Положимъ здѣсь:

$$\left.\begin{aligned} \Omega \sin\omega &= -R_2 \sin\psi_2 \\ \Omega \cos\omega &= R_2 \cos\psi_2 + m. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (228)$$

Тогда получимъ:

$$\Omega \sin(z - \omega) = \frac{l}{R_2^3 \sin^3 \psi_2} \sin^4 z.$$

Введемъ далѣе такое обозначеніе:

$$M = \frac{l}{\Omega R_2^3 \sin^3 \psi_2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (229)$$

Тогда для опредѣленія z окончательно будемъ имѣть уравненіе:

$$M \sin^4 z = \sin(z - \omega) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (230)$$

Чтобы M было положительнымъ, мы условимся въ уравненіяхъ (228) принимать Ω того-же знака, какъ l.

Уравненіе (230) называется *уравненіемъ Гаусса.*

Такимъ образомъ опредѣленіе неизвѣстныхъ ρ_2 и r_2 по формуламъ (227) привело къ опредѣленію угла z изъ уравненія Гаусса (230).

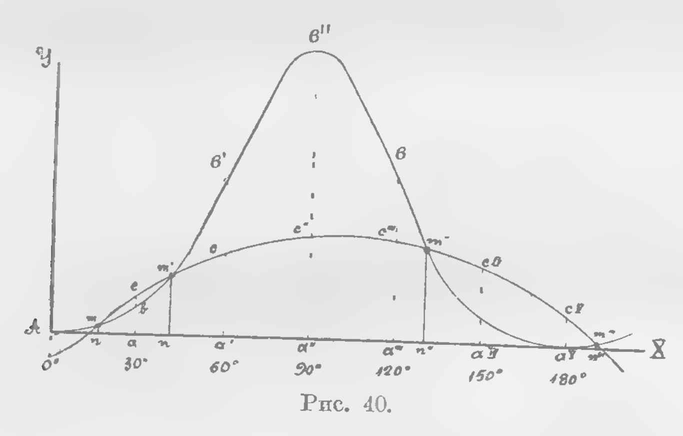


Рис. 40.

Рѣшить это трансцендентное уравненіе можно только послѣдовательными приближеніями. Для опредѣленія приближенныхъ величинъ угла z, удовлетворяющихъ уравненію (230), можетъ служить слѣдующее геометрическое построеніе. Проводимъ двѣ взаимно перпендикулярныя линіи AX и AY (рис. 40) и отъ точки взаимнаго ихъ пересѣченія откладываемъ на линіи AX градусы, принимая, напр., по 10 миллиметровъ на каждые 30°. Изъ точекъ a, a', a'', . . . при 30°, 60°, 90°, . . . возставляемъ перпендикуляры ab, $a'b'$, $a''b''$, . . къ прямой AX и откладываемъ на нихъ длины ab, $a'b'$, $a''b''$, . . . такъ, чтобы эти длины изображали численныя значенія величины $M \sin^4 z$ при $z = 30°$, $z = 60°$, $z = 90°$ и т. д., причемъ за единицу длины можемъ выбрать произвольную величину, напр., 10 милиметровъ. Такимъ образомъ, если бы оказалось, что $M \sin^4 z = 1$, то на соотвѣтственномъ перпендикулярѣ мы отложили бы 10 милиметровъ. При построеніи необходимо стремиться къ тому, чтобы чертежъ былъ отчетливымъ. Кривая линія, проведенная черезъ точки

$A, b, b', b'', \ldots$, представить кривую линію, для которой абсциссою служитъ уголъ z, а ординатою величина $M \sin^4 z$. Подобнымъ же образомъ и по тому же масштабу опредѣляютъ точки $c, c', c'', \ldots$, черезъ которыя проходитъ синусоида, выражаемая уравненіемъ:

$$y = \sin (z - \omega).$$

Абсциссы An, An', An'', An''' точекъ пересѣченія m, m', m'', m''' даютъ величины угла z, удовлетворяющія уравненію (230). Найденные такимъ образомъ углы z могутъ быть ошибочны до одного градуса.

Прежде чѣмъ опредѣлять болѣе точныя величины угла z, удовлетворяющія уравненію (230), необходимо рѣшить, на какой изъ четырехъ величинъ мы должны остановиться.

Такъ какъ ρ_2 и r_2 суть величины существенно положительныя и такъ какъ уголъ ψ_2 всегда меньше $180°$, слѣдовательно $\sin \psi_2$ всегда $> 0°$, то изъ уравненій (227) слѣдуетъ, что величина z, превышающая $180°$, должна быть отброшена. Точно также должна быть отброшена та величина z, которая обращаетъ $\sin (\psi_2 + z)$ въ отрицательную величину. Далѣе не годится для насъ также величина z, обращающая $\sin (\psi_2 + z)$ въ нуль или на практикѣ дающая для $\sin (\psi_2 + z)$ величину, близкую къ нулю. Такимъ образомъ въ большинствѣ случаевъ изъ четырехъ величинъ z остается только одна, пригодная для насъ, именно удовлетворяющая условію $0° < z < 180° - \psi_2$. Въ тѣхъ же рѣдкихъ случаяхъ, когда пригодными окажутся двѣ величины, только при помощи другихъ наблюденій можно рѣшить, на какой величинѣ z слѣдуетъ остановиться.

Положимъ теперь, что изъ четырехъ корней уравненія (230) мы выбрали одинъ, пригодный для нашей задачи. Какъ же въ такомъ случаѣ найти болѣе точную его величину? Назовемъ буквой z_0 приближенную величину корня, и пусть Δz_0 будетъ искомая поправка къ этой приближенной величинѣ. Тогда для опредѣленія Δz_0 имѣемъ условіе:

$$M \sin^4 (z_0 + \Delta z_0) - \sin (z_0 + \Delta z_0 - \omega) = 0.$$

Пользуясь строкой Тэйлора и удерживая лишь первую степень поправки Δz_0, получаемъ:

$$M \sin^4 z_0 + 4M \sin^3 z_0 \cos z_0 \Delta z_0 - \sin (z_0 - \omega) - \cos (z_0 - \omega) \Delta z_0 = 0.$$

Отсюда находимъ для Δz_0 такое выраженіе:

$$\Delta z_0 \sin 1'' = \frac{\sin (z_0 - \omega) - M \sin^4 z_0}{4M \sin^3 z_0 \cos z_0 - \cos (z_0 - \omega)}.$$

Множитель $\sin 1''$ введенъ для того, чтобы обѣ части уравненія сдѣлать однородными. Итакъ, болѣе точное выраженіе z будетъ:

$$z_1 = z_0 + \Delta z_0.$$

Далѣе, такимъ же образомъ мы ищемъ поправку Δz_1 къ z_1 и получаемъ $z_2 = z_1 + \Delta z_1$ и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получимъ $z_n = z_{n-1}$. Тогда $z = z_n$.

Найдя z, мы по формуламъ (227) опредѣляемъ ρ_2 и r_2.

Формулы же (225) и (226) могутъ служить для контроля.

§ 67. Вычисленіе геоцентрическихъ разстояній ρ_1 и ρ_3.

Разъ ρ_2 найдено, то ρ_1 и ρ_3 мы можемъ выразить въ зависимости отъ ρ_2. Для этого намъ надо исключить изъ основныхъ уравненій (211) одинъ разъ величину ρ_3, и тогда ρ_1 будетъ выражено черезъ ρ_2, а другой разъ величину ρ_1, и тогда ρ_3 будетъ выражено черезъ ρ_2. Воспользуемся первыми двумя изъ основныхъ уравненій. Исключаемъ изъ нихъ сперва величину ρ_3. Для этого умножаемъ первое уравненіе на $\sin\lambda_3$, а второе на $-\cos\lambda_3$ и результаты складываемъ. Получаемъ:

$$n_1 \cos\beta_1 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \cdot \rho_1 = \cos\beta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_2) \cdot \rho_2 +$$
$$+ n_1 R_1 \sin(\lambda_3 - L_1) - R_2 \sin(\lambda_3 - L_2) + n_3 R_3 \sin(\lambda_3 - L_3).$$

Преобразуемъ нѣсколько это уравненіе. Для этого воспользуемся тождествомъ:

$$\sin L_1 \sin(L_3 - L_2) + \sin L_2 \sin(L_1 - L_3) + \sin L_3 \sin(L_2 - L_1) = 0.$$

Уменьшая всѣ углы на одну и ту же величину λ_3, получимъ:

$$\sin(L_1 - \lambda_3) \sin(L_3 - L_2) + \sin(L_2 - \lambda_3) \sin(L_1 - L_3) +$$
$$+ \sin(L_3 - \lambda_3) \sin(L_2 - L_1) = 0.$$

Умножая это тождество на $\frac{R_2}{\sin(L_3 - L_1)}$ и принимая во вниманіе формулы (224), будемъ имѣть:

$$- N_1 R_1 \sin(\lambda_3 - L_1) + R_2 \sin(\lambda_3 - L_2) - N_3 R_3 \sin(\lambda_3 - L_3) = 0.$$

Прибавляя этотъ результатъ къ правой части нашего уравненія и полагая для краткости:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \sin(\lambda_3 - \lambda_2) \\ f_2 &= \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \\ h_1 &= R_1 \sin(\lambda_3 - L_1) \\ h_3 &= R_3 \sin(\lambda_3 - L_3), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (231)$$

получаемъ окончательно такое уравненіе для опредѣленія ρ_1:

$$n_1 f_2 \cos\beta_1 \cdot \rho_1 = f_1 \cos\beta_2 \cdot \rho_2 - (N_1 - n_1) h_1 - (N_3 - n_3) h_3 \; . \; . \; . \; . \; (232)$$

Аналогичнымъ образомъ, исключая ρ_1 изъ первыхъ двухъ основныхъ уравненій, получаемъ окончательно такое уравненіе для опредѣленія ρ_3:

$$n_3 f_2 \cos\beta_3 \cdot \rho_3 = f_3 \cos\beta_2 \cdot \rho_2 + (N_1 - n_1) g_1 + (N_3 - n_3) g_3, \quad . \; . \; . \; (233)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} f_3 &= \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \\ g_1 &= R_1 \sin(\lambda_1 - L_1) \\ g_3 &= R_3 \sin(\lambda_1 - L_3). \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (234)$$

Легко видѣть, что f_1, f_2 и f_3 суть малыя величины перваго порядка.

Укажемъ также, что не использованное нами при вычисленіи ρ_1 и ρ_3 третье основное уравненіе даетъ контроль правильности рѣшенія нами основныхъ уравненій для опредѣленія геоцентрическихъ разстояній. Это уравненіе можно написать такимъ образомъ:

$$n_1 \rho_1 \sin\beta_1 + n_3 \rho_3 \sin\beta_3 = \rho_2 \sin\beta_2.$$

§ 68. Опредѣленіе элементовъ эллиптической орбиты.

Приступая къ вычисленію элементовъ эллиптической орбиты, мы прежде всего должны, какъ и въ случаѣ параболической орбиты, вычислить геліоцентрическія координаты r, l, b небеснаго тѣла. Для этой цѣли послужатъ тѣ же самыя формулы, которыми мы пользовались и въ случаѣ параболической орбиты (см. § 54). Такимъ образомъ, для момента t_1 координаты r_1, l_1, b_1 вычисляются по формуламъ:

$$\begin{aligned} r_1 \cos(l_1 - L_1) \cos b_1 &= \rho_1 \cos(\lambda_1 - L_1) \cos\beta_1 - R_1 \\ r_1 \sin(l_1 - L_1) \cos b_1 &= \rho_1 \sin(\lambda_1 - L_1) \cos\beta_1 \\ r_1 \sin b_1 &= \rho_1 \sin\beta_1. \end{aligned}$$

Для опредѣленія координатъ r_2, l_2, b_2 для момента t_2 напишемъ формулы:

$$\begin{aligned} r_2 \cos(l_2 - L_2) \cos b_2 &= \rho_2 \cos(\lambda_2 - L_2) \cos\beta_2 - R_2 \\ r_2 \sin(l_2 - L_2) \cos b_2 &= \rho_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \cos\beta_2 \\ r_2 \sin b_2 &= \rho_2 \sin\beta_2. \end{aligned}$$

Значеніе r_2 должно согласоваться съ его значеніемъ, найденнымъ раньше по второму изъ уравненій (227).

Для вычисленія координатъ r_3, l_3, b_3, соотвѣтствующихъ моменту t_3, служатъ формулы:

$$\begin{aligned} r_3 \cos(l_3 - L_3) \cos b_3 &= \rho_3 \cos(\lambda_3 - L_3) \cos\beta_3 - R_3 \\ r_3 \sin(l_3 - L_3) \cos b_3 &= \rho_3 \sin(\lambda_3 - L_3) \cos\beta_3 \\ r_3 \sin b_3 &= \rho_3 \sin\beta_3. \end{aligned}$$

Затѣмъ опредѣляемъ элементы i и Ω по формуламъ:

$$tg\, i\, sin\, (l_1 - \Omega) = tg\, b_1$$

$$tg\, i\, cos\, (l_1 - \Omega) = \frac{tg\, b_3 - tg\, b_1\, cos\, (l_3 - l_1)}{sin\, (l_3 - l_1)},$$

которыя также уже были выведены, когда рѣчь шла объ опредѣленіи элементовъ параболической орбиты. Напомнимъ, что

$$0^\circ < i < 90^\circ \text{ при } l_3 - l_1 > 0^\circ$$

и

$$90^\circ < i < 180^\circ \text{ при } l_3 - l_1 < 0^\circ.$$

Для контроля произведенныхъ вычисленій можно воспользоваться формулой:

$$tg\, i\, sin\, (l_3 - \Omega) = tg\, b_3.$$

Но еще болѣе важный контроль представляетъ формула:

$$tg\, i\, sin\, (l_2 - \Omega) = tg\, b_2.$$

Послѣ этого надо вычислить аргументы широты для моментовъ t_1, t_2 и t_3, для чего опять воспользуемся уже знакомыми намъ формулами:

$$cos\, u_1 = cos\, (l_1 - \Omega)\, cos\, b_1 \qquad cos\, u_3 = cos\, (l_3 - \Omega)\, cos\, b_3$$

$$sin\, u_1\, cos\, i = sin\, (l_1 - \Omega)\, cos\, b_1 \qquad sin\, u_3\, cos\, i = sin\, (l_3 - \Omega)\, cos\, b_3$$

$$sin\, u_1\, sin\, i = sin\, b_1 \qquad sin\, u_3\, sin\, i = sin\, b_3,$$

къ которымъ присоединимъ еще такія, также легко выводимыя:

$$cos\, u_2 = cos\, (l_2 - \Omega)\, cos\, b_2$$

$$sin\, u_2\, cos\, i = sin\, (l_2 - \Omega)\, cos\, b_2$$

$$sin\, u_2\, sin\, i = sin\, b_2.$$

Вмѣсто этихъ формулъ, какъ и въ случаѣ параболической орбиты, можно воспользоваться слѣдующими:

$$tg\, u_1 = \frac{tg\, (l_1 - \Omega)}{cos\, i} \qquad tg\, u_1 = \frac{tg\, b_1}{sin\, i\, cos\, (l_1 - \Omega)}$$

$$tg\, u_2 = \frac{tg\, (l_2 - \Omega)}{cos\, i} \qquad \text{или} \qquad tg\, u_2 = \frac{tg\, b_2}{sin\, i\, cos\, (l_2 - \Omega)}$$

$$tg\, u_3 = \frac{tg\, (l_3 - \Omega)}{cos\, i} \qquad tg\, u_3 = \frac{tg\, b_3}{sin\, i\, cos\, (l_3 - \Omega)}.$$

При этомъ $cos\, u$ такого же знака, какъ $cos\, (l - \Omega)$, а $sin\, u\, cos\, i$ такого же знака, какъ $sin\, (l - \Omega)$.

Теперь мы можемъ вывести формулу, служащую контролемъ произведенныхъ до сихъ поръ вычисленій. Для этого разсмотримъ сферическій треугольникъ, вершинами котораго служатъ полюсъ эклиптики P и геліоцентрическія положенія небеснаго тѣла C_1 и C_3 (рис. 41). Въ этомъ треугольникѣ имѣемъ:

$$C_1C_3 = u_3 - u_1,\ PC_1 = 90^\circ - b_1,\ PC_3 = 90^\circ - b_3,\ \angle\, C_1PC_3 = l_3 - l_1.$$

Примѣняя къ этому треугольнику первую основную формулу сферической тригонометріи, получаемъ:

$$\cos(u_3 - u_1) = \sin b_1 \sin b_3 + \cos b_1 \cos b_3 \cos(l_3 - l_1).$$

Эта формула легко преобразовывается въ слѣдующую болѣе удобную для производства контроля формулу:

$$\sin^2 \frac{1}{2}(u_3 - u_1) = \sin^2 \frac{1}{2}(b_3 - b_1) + \cos b_1 \cos b_3 \sin^2 \frac{1}{2}(l_3 - l_1),$$

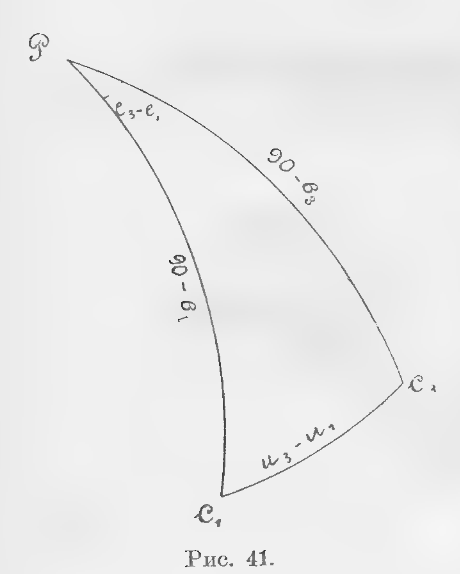


Рис. 41.

которая должна удовлетвориться при подстановкѣ въ нее найденныхъ при помощи предыдущихъ вычисленій величинъ u_1, u_3, l_1, b_1, l_3, b_3.

Итакъ мы опредѣлили два элемента i и ☊. Для опредѣленія остальныхъ элементовъ воспользуемся методомъ, предложеннымъ Мультономъ (The Astronomical Journal, № 510, 1901). Вмѣсто большой полуоси a будемъ опредѣлять полупараметръ p, который связанъ съ a уравненіемъ $p = a(1 - e^2)$.

Вспомнимъ интегралъ площадей

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k\sqrt{M_{1,2}\, p}.$$

Въ данномъ случаѣ, какъ это мы уже неоднократно дѣлали, примемъ $M_{1,2} = 1$. Тогда, замѣчая, что $v = u - \omega$, и что, слѣдовательно, $dv = du$, гдѣ u—аргументъ широты, мы можемъ написать:

$$k\sqrt{p}\, dt = r^2\, du.$$

Беря интегралъ въ предѣлахъ отъ u_1 до u_3, находимъ:

$$k\sqrt{p}\,(t_3 - t_1) = \int_{u_1}^{u_3} r^2\, du \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (235)$$

Входящій въ это уравненіе интегралъ представляетъ удвоенную площадь, ограниченную радіусами-векторами r_1 и r_3 и дугой орбиты, описанной тѣломъ въ промежутокъ времени $t_3 - t_1$. Если бы намъ удалось выразить r въ зависимости отъ u, то, вычисливъ стоящій въ правой части уравненія (235) интегралъ, мы и опредѣлили бы p. Имѣя въ виду, что промежутокъ $t_3 - t_1$ невеликъ, мы можемъ r^2 представить въ видѣ ряда, расположеннаго по степенямъ $u - u_2$, гдѣ u_2 есть значеніе u для второго момента t_2, который въ данномъ случаѣ удобно принять за начальный.

Такимъ образомъ

$$r^2 = r_2^2 + c_1 (u - u_2) + c_2 (u - u_2)^2 + c_3 (u - u_2)^3 + \ldots \quad (236)$$

Коэффиціенты c_1, c_2, c_3, . . . неизвѣстны и потому подлежатъ опредѣленію. Съ этой цѣлью примѣнимъ общее уравненіе (236) къ двумъ частнымъ случаямъ, когда $r = r_1$ и $r = r_3$.

Тогда будемъ имѣть:

$$r_1^2 = r_2^2 + c_1 (u_1 - u_2) + c_2 (u_1 - u_2)^2 + c_3 (u_1 - u_3)^2 + \ldots$$
$$r_3^2 = r_2^2 + c_1 (u_3 - u_2) + c_2 (u_3 - u_2)^2 + c_3 (u_3 - u_2)^3 + \ldots$$

Будемъ пренебрегать третьими и высшими степенями количествъ $u_1 - u_2$ и $u_3 - u_2$, представляющихъ при малыхъ промежуткахъ времени, съ каковыми приходится имѣть дѣло при первыхъ опредѣленіяхъ орбитъ, малыя величины перваго порядка. Далѣе, введемъ обозначенія:

$$\sigma_1 = u_3 - u_2$$
$$\sigma_2 = u_3 - u_1$$
$$\sigma_3 = u_2 - u_1,$$

причемъ между этими величинами существуетъ соотношеніе $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_3$.

Тогда для опредѣленія коэффиціентовъ c_1 и c_2 будемъ имѣть уравненія:

$$- c_1\sigma_3 + c_2\sigma_3^2 = r_1^2 - r_2^2$$
$$c_1\sigma_1 + c_2\sigma_1^2 = r_3^2 - r_2^2.$$

Рѣшаемъ эти уравненія относительно c_1 и c_2. Сначала первое уравненіе умножимъ на $-\sigma_1^2$, а второе на σ_3^2 и сложимъ ихъ. Тогда получаемъ:

$$c_1 = \frac{\sigma_3^2 (r_3^2 - r_2^2) - \sigma_1^2 (r_1^2 - r_2^2)}{\sigma_3\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_3^2}.$$

Затѣмъ первое уравненіе умножимъ на σ_1, а второе на σ_3 и опять сложимъ ихъ. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$c_2 = \frac{\sigma_1 (r_1^2 - r_2^2) + \sigma_3 (r_3^2 - r_2^2)}{\sigma_1\sigma_3^2 + \sigma_3\sigma_1^2}.$$

Замѣчая, что

$$\sigma_1\sigma_3^2 + \sigma_3\sigma_1^2 = \sigma_1\sigma_3(\sigma_3 + \sigma_1) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3,$$

и соединяя въ числителѣ въ обѣихъ формулахъ отдѣльно члены съ r_1^2, r_2^2 и r_3^2, имѣемъ:

$$c_1 = \frac{-\sigma^2{}_1 r^2{}_1 - (\sigma_3^2 - \sigma_1^2)\, r_2^2 + \sigma_3^2 r_3^2}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$$

$$c_2 = \frac{\sigma_1 r_1^2 - (\sigma_1 + \sigma_3)\, r_2^2 + \sigma_3 r_3^2}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$$

или наконецъ

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{-\sigma_1^2 r_1^2 - \sigma_2(\sigma_3 - \sigma_1)\, r_2^2 + \sigma_3^2 r_3^2}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \\ c_2 &= \frac{\sigma_1 r_1^2 - \sigma_2 r_2^2 + \sigma_3 r_3^2}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (237)$$

Подставимъ теперь въ формулу (235) вмѣсто r^2 выраженіе:

$$r^2 = r_2^2 + c_1(u - u_2) + c_2(u - u_2)^2.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$k\sqrt{p}\,(t_3 - t_1) = r_2^2\int_{u_1}^{u_3} du + c_1\int_{u_1}^{u_3}(u - u_2)\,du + c_2\int_{u_1}^{u_3}(u - u_2)^2\,du.$$

Выполняя интегрированія, введемъ новую перемѣнную $x = u - u_2$. Тогда $du = dx$ и предѣлы будутъ $x = u_3 - u_2 = \sigma_1$ при $u = u_3$ и $x = u_1 - u_2 = -\sigma_3$ при $u = u_1$.

Поэтому

$$k\sqrt{p}\,(t_3 - t_1) = r_2^2\int_{-\sigma_3}^{\sigma_1} dx + c_1\int_{-\sigma_2}^{\sigma_1} x\,dx + c_2\int_{-\sigma_3}^{\sigma_1} x^2\,dx.$$

Слѣдовательно

$$k\sqrt{p}\,(t_3 - t_1) = r_2^2(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{c_1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) + \frac{c_2}{3}(\sigma_1^3 + \sigma^3{}_3)$$

или

$$\frac{k\sqrt{p}\,(t_3 - t_1)}{\sin 1''} = r_2^2\sigma_2 - \frac{c_1}{2}\sigma_2(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{c_2}{3}(\sigma_1^3 + \sigma_3^3), \quad . \; . \; . \; (238)$$

причемъ въ лѣвой части введенъ дѣлитель $\sin 1''$, чтобы обѣ части уравненія выразить въ секундахъ дуги.

Такъ какъ коэффиціенты c_1 и c_2 могутъ быть вычислены по уравненіямъ (237), то уравненіе (238) даетъ возможность опредѣлить элементъ p. Точность, съ которою этотъ элементъ получается изъ уравненія (238), въ огромномъ большинствѣ случаевъ совершенно достаточна.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію элементовъ e и ω. Уравненіе эллипса въ полярныхъ координатахъ имѣетъ видъ:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}.$$

Предыдущее уравненіе можемъ написать въ такомъ видѣ:

$$e\cos v = \frac{p - r}{r}.$$

Примѣнимъ это уравненіе къ первому и третьему моментамъ:

$$e\cos v_1 = \frac{p - r_1}{r_1}$$

$$e\cos v_3 = \frac{p - r_3}{r_3}.$$

Во второмъ уравненіи v_3 замѣнимъ выраженіемъ $v_1 + (u_3 - u_1)$. Тогда получимъ:

$$e\cos v_1 \cos(u_3 - u_1) - e\sin v_1 \sin(u_3 - u_1) = \frac{p - r_3}{r_3}.$$

Здѣсь $e\cos v_1$ замѣнимъ его выраженіемъ $\frac{p - r_1}{r_1}$.
Тогда окончательно будемъ имѣть:

$$e\sin v_1 = \frac{1}{\sin(u_3 - u_1)}\left\{\frac{p - r_1}{r_1}\cos(u_3 - u_1) - \frac{p - r_3}{r_3}\right\}$$

$$e\cos v_1 = \frac{p - r_1}{r_1}.$$

Такъ какъ e есть величина положительная, то отсюда безъ всякой двойственности опредѣлимъ уголъ v_1, а затѣмъ и эксцентриситетъ e. Послѣ этого угловое разстояніе ω перигелія отъ узла и истинныя аномаліи v_2 и v_3 легко опредѣляются по слѣдующимъ формуламъ:

$$\omega = u_1 - v_1$$

$$v_2 = u_2 - \omega$$

$$v_3 = u_3 - \omega.$$

Для контроля предыдущихъ вычисленій можетъ служить формула:

$$e\cos v_3 = \frac{p - r_3}{r_3}.$$

Еще болѣе важный контроль представляетъ формула:

$$r_2 = \frac{p}{1 + e \cos v_2}.$$

Зная эксцентриситетъ e и полупараметръ p, найдемъ большую полуось a по формулѣ:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}.$$

Теперь остается опредѣлить шестой элементъ T.

По формулѣ

$$tg\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, tg\frac{v}{2}$$

находимъ эксцентрическую аномалію E для любого изъ моментовъ t_1, t_2 и t_3. Далѣе по уравненію Кеплера

$$M = E - e \sin E$$

вычисляемъ среднюю аномалію M, которая, какъ извѣстно, равна

$$M = \frac{k(t-T)}{a^{3/2}}.$$

Слѣдовательно, время прохожденія небеснаго тѣла черезъ перигелій опредѣлимъ по формулѣ:

$$T = t - \frac{a^{3/2}}{k} M.$$

Для элемента T мы можемъ получить три величины, если наши вычисленія примѣнимъ къ тремъ моментамъ t_1, t_2 и t_3.

Если бы мы хотѣли вычислить среднюю аномалію M_0 какой-нибудь эпохи t_0, то должны были бы воспользоваться формулой:

$$M_0 = M + \frac{k}{a^{3/2}}(t_0 - t),$$

причемъ это уравненіе также можно примѣнить къ тремъ моментамъ.

Итакъ, мы опредѣлили всѣ шесть элементовъ эллиптической орбиты, а именно: i, ☊, ω, e, a, T.

§ 69. Представленіе положеній небеснаго тѣла при помощи вычисленныхъ элементовъ.

Чтобы имѣть понятіе о точности произведенныхъ вычисленій, надо посмотрѣть, насколько хорошо найденные элементы представляютъ тѣ

наблюденія, на основаніи которыхъ они вычислены. Здѣсь достаточно привести безъ вывода формулы, служащія для вычисленія положеній небеснаго тѣла по даннымъ элементамъ i, ☊, ω, a, e, T и по данному времени t. Вотъ эти формулы:

$$M = \frac{k}{a^{3/2}}(t - T)$$

$$E - e \sin E = M$$

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\,\frac{1}{2}\,E$$

$$u = v + \omega$$

$$\rho \cos\beta \cos(\lambda - ☊) = r \cos u + R \cos(L - ☊)$$

$$\rho \cos\beta \sin(\lambda - ☊) = r \sin u \cos i + R \sin(L - ☊)$$

$$\rho \sin\beta = r \sin u \sin i.$$

Называя буквами λ_0 и β_0 наблюденныя долготу и широту, а буквами λ_c и β_c вычисленныя по нашимъ элементамъ, мы по разностямъ $(\lambda_0 - \lambda_c)\cos\beta_c$ и $\beta_0 - \beta_c$ можемъ судить о правильности произведенныхъ вычисленій.

§ 70. Вычисленіе геоцентрическихъ разстояній послѣдовательными приближеніями.

При вычисленіи геоцентрическихъ разстояній мы употребляли для n_1 и n_3 нѣкоторыя приближенныя значенія. Поэтому найденныя нами значенія геоцентрическихъ разстояній не будутъ вполнѣ точными. Чтобы найти болѣе точныя ихъ значенія, необходимо, если это окажется возможнымъ, подставить вмѣсто n_1 и n_3 болѣе точныя ихъ значенія и продѣлать второе приближеніе. Для этого мы могли бы воспользоваться разложеніями въ ряды для отношеній площадей треугольниковъ. Однако болѣе практичнымъ является другой способъ. Именно Гауссъ вводитъ въ разсмотрѣніе отношеніе площади эллиптическаго сектора (rr'), описаннаго радіусомъ-векторомъ небеснаго тѣла за время $(t' - t)$, къ площади соотвѣтствующаго треугольника $[rr']$. Назовемъ это отношеніе буквой y:

$$y = \frac{(rr')}{[rr']}.$$

Если бы намъ удалось выразить y черезъ извѣстныя величины, то этимъ самымъ былъ бы рѣшенъ вопросъ о нахожденіи новыхъ значеній

для отношеній площадей треугольниковъ, такъ какъ отношенія площадей секторовъ намъ извѣстны: они равны, на основаніи перваго закона Кеплера, отношеніямъ соотвѣтствующихъ промежутковъ времени.

За извѣстныя величины мы будемъ принимать радіусы-вектора r и r' и разность истинныхъ аномалій

$$2f = v' - v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (239)$$

На основаніи соображеній, развитыхъ въ началѣ курса, мы имѣемъ такое выраженіе для удвоенной площади эллиптическаго сектора:

$$2\,(rr') = k\sqrt{a\,(1 - e^2)}\,(t' - t).$$

При этомъ мы пренебрегли массою небеснаго тѣла, такъ какъ всѣ вновь открываемыя небесныя тѣла обладаютъ ничтожными массами.

Съ другой стороны:

$$2\,[rr'] = rr' \sin\,(v' - v).$$

Поэтому:

$$y = \frac{k\sqrt{a\,(1 - e^2)}\,(t' - t)}{rr' \sin\,(v' - v)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (240)$$

Къ этому уравненію мы можемъ на основаніи извѣстныхъ свойствъ эллиптическаго движенія присоединить еще слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{r}\,\sin\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a\,(1 + e)}\,\sin\tfrac{1}{2}E \\
\sqrt{r'}\,\sin\tfrac{1}{2}v' &= \sqrt{a\,(1 + e)}\,\sin\tfrac{1}{2}E' \\
\sqrt{r}\,\cos\tfrac{1}{2}v &= \sqrt{a\,(1 - e)}\,\cos\tfrac{1}{2}E \\
\sqrt{r'}\,\cos\tfrac{1}{2}v' &= \sqrt{a\,(1 - e)}\,\cos\tfrac{1}{2}E' \\
E - e\sin E &= \frac{k\,(t - T)}{a^{\frac{3}{2}}} \\
E' - e\sin E' &= \frac{k\,(t' - T)}{a^{\frac{3}{2}}}\,.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (241)$$

Тогда мы будемъ имѣть систему восьми уравненій (239), (240) и (241) съ восемью неизвѣстными:

$$y,\ a,\ e,\ v,\ v',\ E,\ E' \text{ и } T.$$

Насъ интересуетъ сейчасъ только неизвѣстная величина y. Поэтому постараемся исключить, по возможности, всѣ прочія неизвѣстныя. При

этомъ для упрощенія выкладокъ вмѣсто E и E' введемъ другія неизвѣстныя:

$$G = \frac{1}{2}(E' + E)$$

$$g = \frac{1}{2}(E' - E).$$

На основаніи (239) уравненія (240) и (241) легко преобразовываются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{k\sqrt{a(1-e^2)}\,(t'-t)}{rr'\sin 2f} \\ \sqrt{rr'}\sin f &= a\sqrt{(1-e^2)}\sin g \\ \sqrt{rr'}\cos f &= a\cos g - ae\cos G \\ r + r' &= 2a - 2ae\cos g\cos G \\ 2g - 2e\sin g\cos G &= \frac{k(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (242)$$

и мы имѣемъ теперь уже систему пяти уравненій (242) съ пятью неизвѣстными:

$$y,\ a,\ e,\ g,\ G.$$

Очевидно, что изъ системы (242) легко можетъ быть исключена неизвѣстная G. Для этого достаточно значеніе $\cos G$, выведенное изъ одного изъ уравненій системы, подставить въ остальныя; мы воспользуемся для вывода $\cos G$ третьимъ уравненіемъ системы (242). Послѣ нѣкоторыхъ выкладокъ получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{k\sqrt{a(1-e^2)}\,(t'-t)}{rr'\sin 2f} \\ \sqrt{rr'}\sin f &= a\sqrt{(1-e^2)}\sin g \\ r + r' &= 2a\sin^2 g + 2\sqrt{rr'}\cos f\cos g \\ 2g - \sin 2g + \frac{2}{a}\sqrt{rr'}\cos f\sin g &= \frac{k(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (243)$$

Теперь мы имѣемъ систему четырехъ уравненій съ четырьмя неизвѣстными:

$$y,\ a,\ e,\ g.$$

Изъ этой системы легко исключается неизвѣстная e. Именно достаточно значеніе для $\sqrt{1-e^2}$, вытекающее изъ перваго уравненія системы (243), подставить во второе.

Тогда послѣ несложныхъ выкладокъ получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} k\,(t'-t) &= 2y\sqrt{a}\sqrt{rr'}\cos f\sin g \\ r+r' &= 2a\sin^2 g + 2\sqrt{rr'}\cos f\cos g \\ 2g-\sin 2g+\frac{2}{a}\sqrt{rr'}\cos f\sin g &= \frac{k\,(t'-t)}{a^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right\}\ldots (244)$$

Теперь мы имѣемъ систему (244) трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными:

$$y,\ a,\ g.$$

Она въ свою очередь допускаетъ удобное исключеніе неизвѣстной a. Дѣйствительно, намъ достаточно опредѣлить значеніе $\sqrt{a}$ изъ перваго уравненія системы (244) и подставить его въ два другія уравненія. Для сокращенія письма введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{k^2\,(t'-t)^2}{(2\sqrt{rr'}\cos f\,)^3} \\ l &= \frac{r+r'}{4\sqrt{rr'}\cos f}-\frac{1}{2}. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (245)$$

Окончательно мы получаемъ такую систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными величинами y и g:

$$y^2 = \frac{m}{l+\sin^2\frac{1}{2}g}\ldots\ldots\ldots\ldots (246)$$

$$y^3-y^2 = m\,\frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g}\ldots\ldots\ldots (247)$$

Исключеніе неизвѣстной g изъ этой послѣдней системы оказывается невозможнымъ, такъ какъ второе изъ уравненій системы есть сложное трансцендентное уравненіе относительно g. Чтобы имѣть возможность исключить g, мы обратимся къ разложенію въ ряды. Именно постараемся представить величину

$$X = \frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g}$$

въ видѣ ряда расположеннаго по степенямъ величины

$$x = \sin^2\frac{1}{2}\,g.$$

Съ одной стороны мы имѣемъ:

$$\sin 2g = 2g - \frac{1}{6}(2g)^3 + \frac{1}{120}(2g)^5 - \ldots = 2g - \frac{4}{3}g^3 + \frac{4}{15}g^5 - \ldots$$

$$\sin^3 g = \left[g - \frac{1}{6}g^3 + \ldots\right]^3 = g^3 - \frac{1}{2}g^5 + \ldots$$

Откуда:

$$X = \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{15}g^2 + \ldots}{1 - \frac{1}{2}g^2 + \ldots} = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{3}{10}g^2 + \ldots\right) \ldots (248)$$

Съ другой же стороны:

$$g = 2\arc\sin\sqrt{x} = 2\left[\sqrt{x} + \frac{1}{6}(\sqrt{x})^3 + \ldots\right] =$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \ldots \ldots \ldots (249)$$

Подставляя выраженіе (249) для g въ правую часть формулы (248), получаемъ:

$$X = \frac{4}{3}\left[1 + \frac{3}{10}\left(2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \ldots\right)^2 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\left[1 + \frac{6}{5}x + \ldots\right].$$

Систему уравненій (246) и (247) можно переписать теперь такимъ образомъ:

$$y^2 = \frac{m}{l + x} \ldots \ldots (250)$$

$$y^3 - y^2 = \frac{4}{3}m\left[1 + \frac{6}{5}x + \ldots\right] \ldots \ldots (251)$$

Она содержитъ двѣ неизвѣстныхъ величины y и x. Для исключенія неизвѣстной x опредѣлимъ ея значеніе изъ уравненія (250):

$$x = \frac{m}{y^2} - l$$

и подставимъ его въ уравненіе (251). Получимъ:

$$y^3 - y^2 = \frac{4}{3}m\left[1 + \frac{6}{5}\left(\frac{m}{y^2} - l\right) + \ldots\right] \ldots (252)$$

Введемъ вмѣсто m и l двѣ другія величины η и ε, полагая:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{\tau^2}{(r+r')^3} \\ \cos 2\varepsilon &= \frac{2\sqrt{rr'}\cos f}{r+r'}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (253)$$

Тогда:

$$m = \frac{\eta}{\cos^3 2\varepsilon}$$

$$l = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos 2\varepsilon},$$

и уравненіе (252) легко преобразовывается въ слѣдующее:

$$y = 1 + \frac{4}{3}\frac{\eta}{y^2\cos^3 2\varepsilon}\left[1 + \frac{6}{5}\left(\frac{\eta}{y^2\cos^3 2\varepsilon} - \frac{\sin^2\varepsilon}{\cos 2\varepsilon}\right) + \ldots\right] \; . \; . \; (254)$$

При первомъ опредѣленіи орбиты пользуются наблюденіями небеснаго тѣла, отдѣленными малыми промежутками времени. Принимая промежутки времени и соотвѣтствующія геліоцентрическія движенія небеснаго тѣла за малыя величины перваго порядка, мы должны, на основаніи (253), считать η малой величиной второго порядка, а ε малой величиной перваго порядка; тогда, какъ это слѣдуетъ изъ (254) или какъ это можно было бы видѣть непосредственно, значеніе y будетъ близко къ 1. Поэтому примемъ въ уравненіи (254) коэффиціентъ при [ ] равнымъ $\frac{4}{3}\eta$, а въ [ ] отбросимъ малыя величины.

Тогда получаемъ:

$$y = 1 + \frac{4}{3}\eta$$

или

$$\log y = \frac{4\, Mod.}{3}\eta$$

или

$$\log y = [9{,}762723]\,\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (255)$$

Формула (255) оказывается вполнѣ достаточной въ большинствѣ случаевъ, встрѣчающихся на практикѣ: ея преимущество заключается именно въ томъ, что для опредѣленія y нѣтъ надобности въ знаніи разности истинныхъ аномалій Болѣе точную формулу можно найти въ статьѣ Энке въ ежегодникѣ «Berliner Astronomisches Jahrbuch» за 1854 годъ. Не останавливаемся на другихъ методахъ, предложенныхъ для опредѣленія y.

Теперь намъ необходимо указать, какимъ образомъ опредѣляются значенія y на практикѣ и какъ воспользоваться ими для проведенія

приближеній. Предварительно введемъ нѣкоторыя обозначенія въ прежнихъ нашихъ формулахъ.

Положимъ:

$$q = \frac{\tau_1 \tau_3}{6}$$

$$\nu_1 = q\left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right)$$

$$\nu_3 = q\left(1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}\right).$$

Тогда величины m, l, n_1 и n_3, необходимыя для вычисленія геоцентрическихъ разстояній, опредѣляются въ первомъ приближеніи по формуламъ:

$$m = d_1\left(N_1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) + d_3\left(N_3 - \frac{\tau_3}{\tau_2}\right)$$

$$l = d_1 \nu_1 + d_3 \nu_3$$

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{\nu_1}{r_2^3}$$

$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} + \frac{\nu_3}{r_2^3}.$$

Съ найденными въ первомъ приближеніи значеніями геоцентрическихъ разстояній ρ вычисляемъ геліоцентрическія разстоянія r. Необходимыя для этого формулы выводятся аналогично формулѣ (226) и имѣютъ видъ:

$$r_1^2 = \rho_1^2 + R_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1)$$

$$r_3^2 = \rho_3^2 + R_3^2 - 2\rho_3 R_3 \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3).$$

Далѣе вычисляемъ:

$$\eta_1 = \frac{\tau_1^2}{(r_2 + r_3)^3}$$

$$\eta_2 = \frac{\tau_2^2}{(r_1 + r_3)^3}$$

$$\eta_3 = \frac{\tau_3^2}{(r_1 + r_2)^3}$$

$$\log y_1 = [9{,}76272]\, \eta_1$$

$$\log y_2 = [9{,}76272]\, \eta_2$$

$$\log y_3 = [9{,}76272]\, \eta_3.$$

Теперь мы можемъ приступить къ проведенію второго приближенія. При этомъ въ силу сказаннаго въ началѣ настоящаго параграфа легко заключаемъ, что во второмъ приближеніи надо будетъ положить:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{y_2}{y_1}, \quad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} \frac{y_2}{y_3}.$$

Кромѣ того полагаемъ:

$$n_1{}^0 = n_1 - \frac{\nu_1}{r_2{}^2}, \quad n_3{}^0 = n_3 - \frac{\nu_3}{r_2{}^3},$$

$$m = d_1 (N_1 - n_1{}^0) + d_3 (N_3 - n_3{}^0), \qquad l = d_1\nu_1 + d_3\nu_3.$$

Окончивши второе приближеніе, выполняемъ такимъ же образомъ третье и т. д. до тѣхъ поръ, пока значенія для n_1 и n_3, найденныя въ двухъ послѣдовательныхъ приближеніяхъ, не совпадутъ между собою. Найденныя тогда значенія геоцентрическихъ разстояній будутъ окончательными.

На практикѣ надобность въ третьемъ приближеніи встрѣчается очень рѣдко.

Послѣ этого приступаемъ къ опредѣленію элементовъ орбиты. Относительно этого послѣдняго замѣтимъ слѣдующее. Выше былъ указанъ нами методъ Мультона для опредѣленія полупараметра p орбиты. Имѣя готовыми значенія y, мы можемъ теперь указать болѣе простой методъ для опредѣленія p. Именно, такъ какъ

$$p = a(1 - e^2)$$

и такъ какъ

$$v' - v = u' - u,$$

то на основаніи формулы (240) настоящаго параграфа получаемъ слѣдующія три выраженія для полупараметра p:

$$\sqrt{p} = \frac{r_2 r_3 \sin(u_3 - u_2)}{\tau_1} y_1$$

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)}{\tau_2} y_2$$

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}{\tau_3} y_3.$$

Эти три выраженія могутъ служить для контроля вычисленій; замѣтимъ, что наибольшею точностью обладаетъ второе.

Напомнимъ еще, что, приступая ко второму приближенію, мы должны исправить моменты t за аберрацію, для чего изъ этихъ моментовъ надо вычесть поправки вида:

$$\Delta t = [7{,}7612]\, \rho.$$

Необходимыя для этого геоцентрическія разстоянія берутся изъ перваго приближенія.

§ 71. Сводка формулъ, служащихъ для опредѣленія эллиптической орбиты по тремъ наблюденіямъ.

При первомъ опредѣленіи эллиптической орбиты малой планеты пользуются наблюденіями, отдѣленными другъ отъ друга промежутками времени отъ 5 до 20 дней. Рекомендуется при этомъ брать промежутки по возможности равными, такъ какъ благодаря этому будутъ достигнуты и удобство вычисленій, и достаточная точность результатовъ перваго приближенія.

Соберемъ теперь вмѣстѣ всѣ формулы, необходимыя для перваго опредѣленія эллиптической орбиты по тремъ наблюденіямъ.

Подготовка наблюденій.

Подготовка наблюденій выполняется по тѣмъ же самымъ формуламъ, какъ и въ случаѣ параболической орбиты (см. § 57).

Вычисленіе вспомогательныхъ величинъ.

Вычисленія производятся при помощи шестизначныхъ логариѳмовъ.

V.

$$tg\,J\,sin\,(\lambda_1 - \Pi) = tg\,\beta_1$$

$$tg\,J\,cos\,(\lambda_1 - \Pi) = \frac{tg\,\beta_3 - tg\,\beta_1\,cos\,(\lambda_3 - \lambda_1)}{sin\,(\lambda_3 - \lambda_1)},$$

причемъ

$$tg\,J > 0,\ \text{если}\ \lambda_3 > \lambda_1,\ \text{и}\ tg\,J < 0,\ \text{если}\ \lambda_3 < \lambda_1.$$

Контроль:
$$tg\,J\,sin\,(\lambda_3 - \Pi) = tg\,\beta_3.$$

VI.

$$tg\,\beta_0 = tg\,J\,sin\,(\lambda_2 - \Pi)$$

$$d = \frac{tg\,J\,sec\,\beta_2}{tg\,\beta_2 - tg\,\beta_0}.$$

VII.

$$N_1 = \frac{R_2\,sin\,(L_3 - L_2)}{R_1\,sin\,(L_3 - L_1)}$$

$$N_3 = \frac{R_2\,sin\,(L_2 - L_1)}{R_3\,sin\,(L_3 - L_1)}.$$

VIII.

$$d_1 = dR_1 \sin (L_1 - \Pi)$$
$$d_2 = dR_2 \sin (L_2 - \Pi)$$
$$d_3 = dR_3 \sin (L_3 - \Pi).$$

Формула:

$$d_2 = d_1 N_1 + d_3 N_3$$

контролируетъ вычисленія въ *VII* и *VIII.*

IX.

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi_2 \sin P_2 &= \sin\beta_2 \\ \sin\psi_2 \cos P_2 &= \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2) \\ \cos\psi_2 &= \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2). \end{aligned}\right\} \sin\psi_2 > 0.$$

X.

$$f_1 = \sin (\lambda_3 - \lambda_2)$$
$$f_2 = \sin (\lambda_3 - \lambda_1)$$
$$f_3 = \sin (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$g_1 = R_1 \sin (\lambda_1 - L_1)$$
$$g_3 = R_3 \sin (\lambda_1 - L_3)$$

$$h_1 = R_1 \sin (\lambda_3 - L_1)$$
$$h_3 = R_3 \sin (\lambda_3 - L_3).$$

Первое приближеніе.

Вычисленія производятся при помощи пятизначныхъ логариѳмовъ.

XI.

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= k(t_3 - t_2) \\ \tau_2 &= k(t_3 - t_1) \\ \tau_3 &= k(t_2 - t_1). \end{aligned}\right\} \log k = 8{,}23558.$$

Контроль: $\tau_1 + \tau_3 = \tau_2$.

XII.

$$q = \frac{\tau_1 \tau_3}{6}$$

$$\nu_1 = q\left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right)$$

$$\nu_3 = q\left(1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}\right).$$

XIII.

$$m = d_1 \left(N_1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) + d_3 \left(N_3 - \frac{\tau_3}{\tau_2}\right)$$

$$l = d_1 \nu_1 + d_3 \nu_3.$$

XIV.

$$\left.\begin{array}{l} \Omega \sin \omega = - R_2 \sin \psi_2 \\ \Omega \cos \omega = R_2 \cos \psi_2 + m \end{array}\right\} \Omega l > 0$$

$$M = \frac{l}{\Omega (R_2 \sin \psi_2)^3}.$$

XV.

Опредѣляемъ графическимъ методомъ приближенное значенiе z_0 корня уравненiя Гаусса:

$$M \sin^4 z = \sin (z - \omega).$$

Именно z_0 будетъ абсциссой точки пересѣченiя кривыхъ:

$$y = M \sin^4 z$$

$$y = \sin (z - \omega).$$

Необходимо имѣть въ виду, что искомый корень долженъ удовлетворять условiю:

$$0^\circ < z_0 < 180^\circ - \psi_2.$$

XVI.

Ищемъ болѣе точное значенiе корня уравненiя Гаусса путемъ послѣдовательныхъ гипотезъ.

Именно вычисляемъ:

$$\varepsilon = \sin (z_0 - \omega) - M \sin^4 z_0$$

$$\mu = 4M \sin^3 z_0 \cos z_0 - \cos (z_0 - \omega)$$

$$\Delta z_0 = \frac{\varepsilon \operatorname{cosec} 1''}{\mu}; \ \log \operatorname{cosec} 1'' = 5{,}3144$$

$$z_1 = z_0 + \Delta z_0.$$

Въ первой гипотезѣ для z_0 беремъ значенiе, найденное въ графическомъ построенiи. Во второй гипотезѣ за z_0 принимаемъ значенiе z_1, найденное въ концѣ первой гипотезы и т. д. Проведенiе гипотезъ будетъ закончено, когда получится $\varepsilon = 0$.

Замѣтимъ, что вычисленiя μ и Δz_0 производятся при помощи четырехзначныхъ логариѳмовъ.

XVII.

$$\rho_2 = \frac{R_2 \sin (\psi_2 + z)}{\sin z}$$

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \psi_2}{\sin z}.$$

Формулы:

$$\rho_2 = -m + \frac{l}{r_2^3}$$

$$r_2^2 = R_2^2 + \rho_2^2 - 2R_2\rho_2 \cos\psi_2$$

контролируютъ вычисленія въ *XIV—XVII*.

XVIII.

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{\nu_1}{r_2^3}$$

$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} + \frac{\nu_3}{r_2^3}.$$

XIX.

$$n_1 f_2 \cos\beta_1 . \rho_1 = f_1 \cos\beta_2 . \rho_2 - (N_1 - n_1) h_1 - (N_3 - n_3) h_3$$

$$n_3 f_2 \cos\beta_3 . \rho_3 = f_3 \cos\beta_2 . \rho_2 + (N_1 - n_1) g_1 + (N_3 - n_3) g_3.$$

Формула

$$\rho_2 \sin\beta_2 = n_1 \rho_1 \sin\beta_1 + n_3 \rho_3 \sin\beta_3$$

контролируетъ вычисленія въ *V—XIX*.

Второе приближеніе.

XX.

Вычитаемъ изъ моментовъ t аберраціонныя времена

$$\Delta t = [7,7612]\, \rho.$$

Исправленные такимъ образомъ моменты будемъ попрежнему обозначать буквами t со значками.

Съ ними повторяемъ вычисленія въ *XI* и *XII*, но уже помощью шестизначныхъ логариѳмовъ; $\log k = 8,235581$.

XXI.

$$r_1^2 = R_1^2 + \rho_1^2 - 2R_1\rho_1 \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1)$$

$$r_3^2 = R_3^2 + \rho_3^2 - 2R_3\rho_3 \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3).$$

XXII.

$$\eta_1 = \frac{\tau_1^2}{(r_2 + r_3)^3} \qquad \log y_1 = [9,76272]\, \eta_1$$

$$\eta_2 = \frac{\tau_2^2}{(r_1 + r_3)^3} \qquad \log y_2 = [9,76272]\, \eta_2$$

$$\eta_3 = \frac{\tau_3^2}{(r_1 + r_2)^3} \qquad \log y_3 = [9,76272]\, \eta_3.$$

XXIII.

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}\,\frac{y_2}{y_1} \qquad n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2}\,\frac{y_2}{y_3}.$$

XXIV.

$$n_1^0 = n_1 - \frac{\nu_1}{r_2^3}$$

$$n_3^0 = n_3 - \frac{\nu_3}{r_2^3}.$$

Далѣе повторяемъ вычисленія, указанныя въ *XIII—XIX*, но уже помощью шестизначныхъ логариѳмовъ. При этомъ въ *XIII* и *XVIII* вмѣсто $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ и $\frac{\tau_3}{\tau_2}$ надо брать соотвѣтственно n_1^0 и n_3^0.

Замѣтимъ, что при рѣшеніи уравненія Гаусса для z_0 берется значеніе корня, найденное въ первомъ приближеніи.

Опредѣленіе элементовъ.

Вычисленія производятся при помощи шестизначныхъ логариѳмовъ.

XXV.

По уравненіямъ:

$$r \cos b \sin (l - L) = \rho \cos \beta \sin (\lambda - L)$$
$$r \cos b \cos (l - L) = \rho \cos \beta \cos (\lambda - L) - R$$
$$r \sin b = \rho \sin \beta$$

опредѣляемъ значенія r, l и b для моментовъ t_1, t_2 и t_3.

Согласованіе значенія r_2 съ его значеніемъ, найденнымъ во второмъ приближеніи въ *XVII*, даетъ контроль.

XXVI.

$$tg\, i \sin (l_1 - \Omega) = tg\, b_1$$

$$tg\, i \cos (l_1 - \Omega) = \frac{tg\, b_3 - tg\, b_1 \cos (l_3 - l_1)}{\sin (l_3 - l_1)},$$

причемъ

$$0^\circ < i < 90^\circ, \quad \text{если } l_3 > l_1,$$
$$90^\circ < i < 180^\circ, \quad \text{если } l_3 < l_1.$$

Контроль:

$$tg\, b_3 = tg\, i \sin (l_3 - \Omega).$$

Гораздо болѣе важный контроль представляетъ формула:

$$tg\, b_2 = tg\, i \sin (l_2 - \Omega).$$

Она контролируетъ всѣ предыдущія вычисленія въ *V—XXVI*.

XXVII.

Опредѣляемъ u_1, u_2, u_3 по формулѣ:

$$tg\, u = \frac{tg\,(l - \Omega)}{\cos i}$$

или по формулѣ:

$$tg\, u = \frac{tg\, b}{\sin i \cos (l - \Omega)}$$

въ зависимости отъ того, что точнѣе пріискивается $\log \cos i$ или $\log \sin i$.

При опредѣленіи четверти угла u имѣемъ въ виду, что

$\cos u$ того же знака, что $\cos (l - \Omega)$,

$\sin u \cos i$ того же знака, что $\sin (l - \Omega)$.

Замѣтимъ, что для планетныхъ орбитъ непремѣнно $0° < i < 90°$, и u лежитъ въ той же четверти, что $l - \Omega$.

Контроль:

$$\sin^2 \frac{1}{2}(u_3 - u_1) = \sin^2 \frac{1}{2}(b_3 - b_1) + \cos b_1 \cos b_3 \sin^2 \frac{1}{2}(l_3 - l_1).$$

XXVIII.

$$\sqrt{p} = \frac{r_2 r_3 \sin (u_3 - u_2)}{\tau_1} y_1$$

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_3 \sin (u_3 - u_1)}{\tau_2} y_2$$

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_2 \sin (u_2 - u_1)}{\tau_3} y_3.$$

Въ случаѣ неполнаго согласія этихъ результатовъ между собою слѣдуетъ наибольшее довѣріе приписать второму.

XXIX.

$$q_1 = \frac{p}{r_1} - 1$$

$$q_3 = \frac{p}{r_3} - 1$$

$$e \sin v_1 = \frac{q_1 \cos (u_3 - u_1) - q_3}{\sin (u_3 - u_1)}$$

$$e \cos v_1 = q_1$$

$$\omega = u_1 - v_1$$

$$v_2 = u_2 - \omega$$

$$v_3 = u_3 - \omega.$$

Контроль:

$$q_3 = e \cos v_3.$$

Болѣе важный контроль представляетъ формула:

$$r_2 = \frac{p}{1 + e \cos v_2}.$$

XXX.

По формуламъ:

$$tg \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}\, tg \frac{1}{2} v$$

$$M = E - e \operatorname{cosec} 1'' \sin E \qquad \log \overline{\operatorname{cosec}} 1'' = 5{,}314425$$

опредѣляемъ значенія E и M для моментовъ t_1, t_2, t_3.

XXXI.

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

$$n = \frac{k \operatorname{cosec} 1''}{a^{3/2}} \qquad \log (k \operatorname{cosec} 1'') = 3{,}550007$$

$$M_0 = M + n (t_0 - t).$$

Моментъ t_0 выбирается произвольно, обыкновенно въ промежуткѣ времени, охватывающемъ наблюденія.

По предыдущей формулѣ найдутся три значенія для M_0; ихъ согласіе между собою даетъ контроль.

Представленіе исходныхъ положеній небеснаго тѣла найденными элементами.

Вычисленія производятся при помощи шестизначныхъ логариѳмовъ.

XXXII.

$$M = M_0 + n (t - t_0).$$

Опредѣляемъ E изъ уравненія Кеплера:

$$E - e \sin E = M.$$

Приближенное значеніе $E^{(0)}$ беремъ готовымъ изъ *XXX*, а затѣмъ примѣняемъ методъ дифференціальныхъ поправокъ. Въ данномъ случаѣ всегда достаточно вычислить одну поправку, а именно:

$$M^{(0)} = E^{(0)} - e \operatorname{cosec} 1'' \sin E^{(0)}$$

$$\varepsilon = M - M^{(0)}$$

$$\Delta E^{(0)} = \frac{\text{[illegible]}}{1 - e \cos E^{(0)}}$$

$$E = E^{(0)} + \Delta E^{(0)}.$$

Замѣтимъ, что вычисленіе поправки $\Delta E^{(0)}$ производится при помощи трехзначныхъ логариѳмовъ.

XXXIII.

$$r = a\,(1 - e \cos E)$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\; tg\,\frac{1}{2}\,E$$

$$u = v + \omega.$$

XXXIV.

$$\rho \cos\beta \sin(\lambda - \Omega) = r \sin u \cos i + R \sin(L - \Omega)$$
$$\rho \cos\beta \cos(\lambda - \Omega) = r \cos u + R \cos(L - \Omega)$$
$$\rho \sin\beta = r \sin u \sin i.$$

Образуемъ разности

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda_c$$
$$\Delta\beta = \beta_0 - \beta_c,$$

гдѣ λ_0 и β_0 обозначаютъ установленныя въ *IV* значенія координатъ, съ которыми было начато опредѣленіе орбиты; а λ_c и β_c обозначаютъ ихъ значенія, вычисленныя здѣсь въ *XXXIV*.

Разности $\Delta\lambda \cos\beta$ и $\Delta\beta$ не должны превышать $1''$.

§ 72. Примѣръ опредѣленія эллиптической орбиты по тремъ наблюденіямъ.

Даны слѣдующія три наблюденія планеты (28) на Алжирской обсерваторіи:

	Среднее Алжирское время.	α	δ
1905 Марта 8	$9^h 50^m 28^s$	$12^h 30^m 34^s.25$	$5^\circ 54' 42''.0$
16	9 24 14	12 25 9 .23	7 7 18 .0
24	9 2 55	12 19 11 .80	8 16 19 .9.

Требуется опредѣлить элементы орбиты этой планеты.

Подготовка наблюденій.

I.

Долгота Алжирской обсерваторіи относительно Берлина есть:

$$0^h 41^m 26^s \text{ къ западу.}$$

Поэтому, выражая моменты наблюденій по среднему Берлинскому времени, мы получаемъ:

Марта	8	$10^h 31^m 54^s$
	16	10 5 40
	24	9 44 21.

Выражая моменты наблюденій въ доляхъ сутокъ, будемъ имѣть:

$$t_1 = 8.43882$$
$$t_2 = 16.42060$$
$$t_3 = 24.40580.$$

II.

	t	$f = L$	f_1	f_2	$f = \log R$	f_1	f_2
Мартъ	7	346°13′42″.7			9.996821		
			60′ 0″.5			114	
	8	347 13 43 .2		—2″.0	935		0
			59 58 .5			114	
	9	348 13 41 .7		—2 .0	9.997049		0
			59 56 .5			114	
	10	349 13 38 .2			163		
	15	354 12 47 .8			9.997743		
			59 43 .2			118	
	16	355 12 31 .0		—2 .3	861		0
			59 40 .9			118	
	17	356 12 11 .9		—2 .3	979		2
			59 38 .6			120	
	18	357 11 50 .5			9.998099		
	23	2 9 32 .0			9.998713		
			59 26 .5			126	
	24	3 8 58 .5		—1 .9	839		0
			59 24 .6			126	
	25	4 8 23 .1		—1 .8	965		1
			59 22 .8			127	
	26	5 7 45 .9			9.999092		

	t_1	t_2	$t_п$
n	0.43882	0.42060	0.40580
$\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ *)	—0.12	—0.12	—0.12

		L			$\log R$	
f_1	59′58″.5	59′40″.9	59′24″.6	114	118	12
f_2	—2.0	—2.3	—1 .8	0	1	
n	9.64229	9.62387	9.60831	9.642	9.624	9.60
f_1	3.55612	3.55399	3.55201	2.057	2.072	2.10
nf_1	3.19841	3.17786	3.16032	1.699	1.696	1.70
f	347°13′43″.2	355°12′31″.0	3° 8′58″.5	9.996935	9.997861	9.99883
nf_1	26 19 .1	25 6 .1	24 6 .5	50	50	5
$\frac{1}{2}\,n\,(n-1)\,f_2$	0 .2	0 .3	0 .2	0	0	
	347 40 2 .5	355 37 37 .4	3 33 5 .2	9.996985	9.997911	9.99889

III.

	t_1	t_2	t_3
G	80° 8′	78°17′	76°33′
α	187 39	186 17	184 48
H	283 20	274 40	266 1
$G+\alpha$	267 47	264 34	261 21
$H+\alpha$	100 59	100 57	90 49
δ	5 55	7 7	8 16
$\sin(G+\alpha)$	9.9997$_n$	9.9980$_n$	9.9950$_n$
g	0.9181	0.9169	0.9183
$\cos(G+\alpha)$	8.5875$_n$	8.9763$_n$	9.1772$_n$
$\sin(H+\alpha)$	9.9702	9.9920	0.0000
h	1.2755	1.2739	1.2739
$\cos(H+\alpha)$	9.5540$_n$	9.2786$_n$	8.1539$_n$
$g\sin(G+\alpha)$	0.9178$_n$	0.9149$_n$	0.9133$_n$
$tg\,\delta$	9.0155	9.0964	9.1622
$h\sin(H+\alpha)$	1.2457	1.2659	1.2739
$\cos\delta$	9.9977	9.9966	9.9955
i	0.9009$_n$	0.9097$_n$	0.9101$_n$
$h\cos(H+\alpha)$	0.8295$_n$	0.5525$_n$	9.4278$_n$
$\sin\delta$	9.0132	9.0930	9.1577
f	3″.24	3″.83	4″.42
$g\sin(G+\alpha)\,tg\,\delta$	— 0 .86	— 1 .03	— 1 .19
$h\sin(H+\alpha)\sec\delta$	17 .70	18 .59	18 .99
$\Delta\alpha$	20 .08	21 .39	22 .22

*) Пріискано по таблицѣ I.

$g \cos (G + \alpha)$	—0″.32	—0″.78	—1″.25
$h \cos (H + \alpha) \sin \delta$	—0 .70	—0 .44	—0 .04
$i \cos \delta$	—7 .92	—8 .06	—8 .05
$\Delta\delta$	—8 .94	—9 .28	—9 .34
α	187°38′33″.7	186°17′18″.5	184°47′57″.0
$\Delta\alpha$	20 .1	21 .4	22 .2
$\alpha - \Delta\alpha$	187 38 13 .6	186 16 57 .1	184 47 34 .8
δ	5 54 42 .0	7 7 18 .0	8 16 19 .9
$\Delta\delta$	—8 .9	—9 .3	—9 .3
$\delta - \Delta\delta$	5 54 50 .9	7 7 27 .3	8 16 29 .2

IV.

ε 23°27′ 5″.9 $2 \sin \frac{1}{2} \varepsilon$ 9.609015

	t_1	t_2	t_3
α	187°38′13″.6	186°16′57″.1	184°47′34″.8
δ	5 54 50 .9	7 7 27 .3	8 16 29 .2
$\sin \alpha$	9.123520_n	9.039141_n	8.921978_n
$\cos \delta$	9.997682	9.996634	9.995455
$\cos \alpha$	9.996130_n	9.997384_n	9.998479_n
$n \sin N$	9.012997	9.093497	9.158123
$\cos N$	9.896916_n	9.876434	9.938061
$n \cos N$	9.121202_n	9.035775_n	8.917433_n
$tg N$	9.891795_n	0.057722_n	0.240690_n
N	142° 3′53″.7	131°12′12″.8	119°52′42″.7
$N - \varepsilon$	118 36 47 .8	107 45 6 .9	96 25 36 .8
$\cos (N-\varepsilon)$	9.680240_n	9.484152_n	9.048967_n
n	9.224286	9.217063	9.220062
$\sin (N-\varepsilon)$	9.943431	9.978813	9.997262
$\cos \beta \sin \lambda$	8.904526_n	8.701215_n	8.269029_n
$\cos \lambda$	9.998565_n	9.999437_n	9.999923_n
$\cos \beta \cos \lambda$	9.993812_n	9.994018_n	9.993934_n
$tg \lambda$	8.910714	8.707197	8.275095
$\sin \beta$	9.167717	9.195876	9.217324
$\cos \beta$	9.995247	9.994581	9.994011
$tg \beta$	9.172470	9.201295	9.223313
λ	184°39′16″.5	182°55′ 1″.4	181° 4′45″.7
β	8 27 39 .4	9 1 56 .3	9 29 37 .3

Контроль:

	t_1	t_2	t_3
$\frac{1}{2}(\delta+\beta)$	7°11′15″.2	8° 4′41″.8	8°53′3″.2
$N-\frac{1}{2}\varepsilon$	130 20 20 .7	119 28 39 .8	108 9 9 .7
$\sin\left(N-\frac{1}{2}\varepsilon\right)$	9.882085	9.939792	9.977828
$\sec\beta$	0.004753	0.005419	0.005989
$\cos\alpha$	9.996130_n	9.997384_n	9.998479_n
n	9.224286	9.217063	9.220062
$\sec\frac{1}{2}(\delta+\beta)$	0.003426	0.004331	0.005242
$\cos\left(N-\frac{1}{2}\varepsilon\right)$	9.811112_n	9.692040_n	9.493528_n
$\sin(\lambda-\alpha)$	8.716269_n	8.768673_n	8.811373_n
$\lambda-\alpha$	—2°58′57″.2	—3°21′55″.7	—3°42′49″.1
	—2 58 57 .1	—3 21 55 .7	—3°42 49 .1
$\sin\frac{1}{2}(\delta-\beta)$	8.346809_n	8.221419_n	8.026817
$\frac{1}{2}(\delta-\beta)$	—1°16′24″.3	—0°57′14″.5	—0°36′34″.1
	—1 16 24 .3	—0 57 14 .5	—0 36 34 .1

Итакъ, въ основаніе опредѣленія орбиты должны быть положены слѣдующія величины:

	t	L	R	λ	β
1905 Марта	8.43882	347°40′ 2″.5	9.996985	184°39′16″.5	8°27′39″.4
	16.42060	355 37 37 .4	9.997911	182 55 1 .4	9 1 56 .3
	24.40580	3 33 5 .2	9.998890	181 4 45 .7	9 29 37 .3

Вычисленіе вспомогательныхъ величинъ.

V.

$\lambda_3-\lambda_1$	—3°34′30″.8	$tg(\lambda_1-\Pi)$	9.694027_n
$tg\,\beta_1$	9.172470	$tg\,J$	9.525918_n
$\cos(\lambda_3-\lambda_1)$	9.999154	$\lambda_1-\Pi$	—26°18′18″.3
$tg\,\beta_3$	9.223313	λ_1	184 39 16 .5
	9.101717	Π	210 57 34 .8
$tg\,\beta_1\cos(\lambda_3-\lambda_1)$	9.171624	λ_3	181 4 45 .7
	0.051689	$\lambda_3-\Pi$	—29 52 49 .1
$tg\,\beta_3-tg\,\beta_1\cos(\lambda_3-\lambda_1)$	8.273341		
$\sin(\lambda_3-\lambda_1)$	8.794898_n	Контроль:	
$tg\,J\sin(\lambda_1-\Pi)$	9.172470	$tg\,J$	9.525918_n
$\cos(\lambda_1-\Pi)$	9.952525	$\sin(\lambda_3-\Pi)$	9.697395_n
$tg\,J\cos(\lambda_1-\Pi)$	9.478443_n	$tg\,\beta_3$	9.223313
			9.223313

VI.

λ_2	182°55′ 1″.4
II	210 57 34 .8
λ_2 — II	—28 2 33 .4
$tg\,J$	9.525918_n
$sin\,(\lambda_2$ — II)	9.672216_n
$tg\,\beta_0$	9.198134
	7.863625
$tg\,\beta_2$	9.201295
	0.003161
$tg\,J$	9.525918_n
$sec\,\beta_2$	0.005419
$tg\,\beta_2 - tg\,\beta_0$	7.061759
d	2.469578_n

VII.

$L_3 - L_2$	7°55′27″.8
$L_3 - L_1$	15 53 2 .7
$L_2 - L_1$	7 57 34 .9
$sin\,(L_3 - L_2)$	9.139458
R_2	9.997911
$sin\,(L_2 - L_1)$	9.141376
R_1	9.996985
$sin\,(L_3 - L_1)$	9.437262
R_3	9.998890
$R_2\,sin\,(L_3 - L_2)$	9.137369
$R_1\,sin\,(L_3 - L_1)$	9.434247
$R_2\,sin\,(L_2 - L_1)$	9.139287
$R_3\,sin\,(L_3 - L_1)$	9.436152
N_1	9.703122
N_3	9.703135

VIII.

L_1 — II	136°42′27″.7
L_2 — II	144 40 2 .6
L_3 — II	152 35 30 .4
$sin\,(L_1$ — II)	9.836147
R_1	9.996985
$sin\,(L_2$ — II)	9.762169
R_2	9.997911
$sin\,(L_3$ — II)	9.663066
R_3	9.998890
d_1	2.302710_n
d_2	2.229658_n
d_3	2.131534_n
Контроль:	
d_1	2.302710_n
N_1	9.703122
d_3	2.131534_n
N_3	9.703135
$d_1 N_1$	2.005832
	0.223827
$d_3 N_3$	1.834669_n
	9.828837
d_2	2.229659_n
	2.229658_n

IX.

$\lambda_2 - L_2$	187°17′24″.0
$sin\,(\lambda_2 - L_2)$	9.103433_n
$cos\,\beta_2$	9.994581
$cos\,(\lambda_2 - L_2)$	9.996475_n
$sin\,\psi_2\,sin\,P_2$	9.195876
$sin\,P_2$	9.892949
$sin\,\psi_2\,cos\,P_2$	9.098014_n
$tg\,P_2$	0.097862
$sin\,\psi_2$	9.302927
$cos\,\psi_2$	9.991056_n
$tg\,\psi_2$	9.311871_n
ψ_2	168°24′42″.6

X.

$\lambda_3 - \lambda_2$	$-1^\circ 50' 15''.7$	$\sin(\lambda_1 - L_1)$	9.465619_n
$\lambda_3 - \lambda_1$	$-3\ 34\ 30\ .8$	R_1	9.996985
$\lambda_2 - \lambda_1$	$-1\ 44\ 15\ .1$	$\sin(\lambda_3 - L_1)$	9.365397_n
$\lambda_1 - L_1$	196 59 14 .0	$\sin(\lambda_1 - L_3)$	8.284481_n
$\lambda_1 - L_3$	181 6 11 .3	R_3	9.998890
$\lambda_3 - L_1$	193 24 43 .2	$\sin(\lambda_3 - L_3)$	8.634806
$\lambda_3 - L_3$	177 31 40 .5	g_1	9.462604_n
f_1	8.506076_n	g_3	8.283371_n
f_2	8.794898_n	h_1	9.362382_n
f_3	8.481742_n	h_3	8.633696

Первое приближеніе.

XI.

$t_3 - t_2$	7.98520
$t_3 - t_1$	15.96698
$t_2 - t_1$	7.98178
$t_3 - t_2$	0.90229
$t_3 - t_1$	1.20322
$t_2 - t_1$	0.90210
τ_1	9.13787
τ_2	9.43880
τ_3	9.13768
Контроль:	
τ_1	9.13787
	0.30093
τ_3	9.13768
	0.00019
τ_2	9.43880
	9.43880

XII.

$\tau_1 \tau_3$	8.27555
6	0.77815
$\tau_1 : \tau_2$	9.69907
$\tau_3 : \tau_2$	9.69888
$1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}$	0.17612
q	7.49740
$1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}$	0.17606
ν_1	7.67352
ν_3	7.67346

XIII.

N_1	9.70312
	2.03235
$\tau_1 : \tau_2$	9.69907
	0.00405
N_3	9.70314
	2.01050
$\tau_3 : \tau_2$	9.69888
	0.00426
$N_1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}$	7.67077
d_1	2.30271_n
ν_1	7.67352
$N_3 - \frac{\tau_3}{\tau_2}$	7.69264
d_3	2.13153_n
ν_3	7.67346
$d_1\left(N_1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right)$	9.97348_n
	0.23276
$d_3\left(N_3 - \frac{\tau_3}{\tau_2}\right)$	9.82417_n
	0.14931
$d_1\nu_1$	9.97623_n
	0.22379
$d_3\nu_3$	9.80499_n
	0.17124
m	0.20624_n
l	0.20002_n

XIV.

$\cos\psi_2$	9.99106_n
R_2	9.99791
$\sin\psi_2$	9.30293
$R_2 \cos\psi_2$	9.98897_n
	0.20584
m	0.20624_n
	0.21727
$\Omega \sin\omega$	9.30084_n
$\cos\omega$	9.99087
$\Omega \cos\omega$	0.41208_n
$tg\,\omega$	8.88876
ω	4°25′33″.8
$(R_2 \sin\psi_2)^3$	7.90252
Ω	0.41338_n
l	8.31590_n
	0.20002_n
M	1.88412

XV.

Теперь намъ надо рѣшить уравненіе Гаусса:

$$[1.88412] \sin^4 z = \sin(z - 4°25'33''.8).$$

Графическое построеніе даетъ слѣдующіе корни:

5°, 12°, 165° и 184°.

Только первый изъ этихъ корней удовлетворяетъ условію:

$$0° < z < 180° - \psi_2.$$

Дѣлая построеніе въ болѣе крупномъ масштабѣ, находимъ:

$$z_0 = 4°37'.$$

XVI.

	Первая гип.	Вторая гип.
z_0	4°37′ 0″.0	4°36′32″.4
$z_0 - \omega$	11 26 .2	10 58 .6
$sin\, z_0$	8.90574	8.90502
$sin^4 z_0$	5.62296	5.62008
$M\, sin^4 z_0$	7.50708	7.50420
$sin\, (z_0 - \omega)$	7.52202	7.50420
$sin\, (z_0 - \omega)$	0.0033267	
$M\, sin^4 z_0$	0.0032143	
ε	0.0001124	
$sin^3 z_0$	6.7172	
$cos\, z_0$	9.9986	
$4M\, sin^3 z_0 \cos z_0$	9.2020	
	0.0753	
$cos\, (z_0 - \omega)$	0.0000	
	0.7980	
ε	6.0508	
$1 : \mu$	0.0753_n	
Δz_0	1.4405_n	
Δz_0	—27″.6	
z_1	4°36′32″.4	

Проведеніе гипотезъ можно считать законченнымъ.

XVII.

ψ_2	168°24′42″.6
z	4 36 32 .4
$\psi_2 + z$	173 1 15
$sin\, (\psi_2 + z)$	9.08461
R_2	9.99791
$R_2 \sin\, (\psi_2 + z)$	9.08252
$cosec\, z$	1.09498
$R_2 \sin \psi_2$	9.30084
ρ_2	0.17750
r_2	0.39582

Контроль:

l	0.20002_n
$r_2^{\ 3}$	1.18746
m	0.20624_n
	0.02873
$l : r_2^{\ 3}$	9.01256_n
	1.19368
ρ_2	0.17751
	0.17750
R_2	9.99791
ρ_2	0.17750
$cos\, \psi_2$	9.99106_n
$2R_2\rho_2 \cos \psi_2$	0.46750_n
$R_2^{\ 2}$	9.99582
$\rho_2^{\ 2}$	0.35500
$R_2^{\ 2}$	0.9904
$\rho_2^{\ 2}$	2.2646
$2R_2\rho_2 \cos \psi_2$	—2.9343
$r_2^{\ 2}$	6.1893
$r_2^{\ 2}$	0.79164
r_2	0.39582
	0.39582

XVIII.

ν_1	7.67352
$1 : r_2^3$	8.81254
ν_3	7.67346
$\tau_1 : \tau_2$	9.69907
	0.00027
$\nu_1 : r_2^3$	6.48606
	3.213
$\tau_3 : \tau_2$	9.69888
	0.00027
$\nu_3 : r_2^3$	6.48600
	3.213
n_1	9.69934
n_3	9.69915

XIX.

N_1	9.70312
	2.06218
n_1	9.69934
	0.00378
N_3	9.70314
	2.03880
n_3	9.69915
	0.00399
h_1	9.36238_n
$N_1 - n_1$	7.64094
g_1	9.46260_n
h_3	8.63370
$N_3 - n_3$	7.66434
g_3	8.28337_n
n_1	9.69934
$\cos\beta_1$	9.99525
f_2	8.79490_n
$\cos\beta_3$	9.99401
n_3	9.69915
f_1	8.50608_n
$\cos\beta_2$	9.99458
ρ_2	0.17750
f_3	8.48174_n

$f_1 \cos\beta_2 . \rho_2$	8.67816_n
	0.00929
$(N_1 - n_1)\, h_1$	7.00332_n
	1.67484
$f_1 \cos\beta_2 . \rho_2 - (N_1 - n_1)\, h_1$	8.66887_n
	0.00185
$(N_3 - n_3)\, h_3$	6.29804
	2.37083
$f_3 \cos\beta_2 . \rho_2$	8.65382_n
	0.01206
$(N_1 - n_1)\, g_1$	7.10354_n
	1.55028
$f_3 \cos\beta_2 . \rho_2 + (N_1 - n_1)\, g_1$	8.66588_n
	0.00083
$(N_3 - n_3)\, g_3$	5.94771_n
	2.71817
$n_1 f_2 \cos\beta_1 . \rho_1$	8.67072_n
$n_1 f_2 \cos\beta_1$	8.48949_n
ρ_1	0.18123
$n_3 f_2 \cos\beta_3 . \rho_3$	8.66671_n
$n_3 f_2 \cos\beta_3$	8.48806_n
ρ_3	0.17865

Контроль:

n_1	9.69934
$\sin\beta_1$	9.16772
ρ_1	0.18123
n_3	9.69915
$\sin\beta_3$	9.21732
ρ_3	0.17865
$n_1 \sin\beta_1 . \rho_1$	9.04829
	0.27825
$n_3 \sin\beta_3 . \rho_3$	9.09512
	0.04683
$\sin\beta_3 . \rho_2$	9.37337
$\sin\beta_2$	9.19588
ρ_2	0.17749
	0.17750

Второе приближеніе.

XX.

	t_1	t_2	t_3
ρ	0.1812	0.1775	0.1786
Δt	7.9424	7.9387	7.9398
	8.43882	16.42060	24.40580
Δt	0.00876	0.00868	0.00871
t	8.43006	16.41192	24.39709

XI.

$t_3 - t_2$	7.98517
$t_3 - t_1$	15.96703
$t_2 - t_1$	7.98186
$t_3 - t_2$	0.902284
$t_3 - t_1$	1.203224
$t_2 - t_1$	0.902104
τ_1	9.137865
τ_2	9.438805
τ_3	9.137685

Контроль:

τ_1	9.137865
	0.300940
τ_3	9.137685
	9.999820
τ_2	9.438805
	9.438805

XII.

$\tau_1\tau_3$	8.275550
6	0.778151
$\tau_1 : \tau_2$	9.699060
$\tau_3 : \tau_2$	9.698880
$1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}$	0.176121
q	7.497399
$1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}$	0.176061
ν_1	7.673520
ν_3	7.673460

XXI.

$\lambda_1 - L_1$	196°59′14″
$\lambda_3 - L_3$	177 31 40
R_1	9.99698
ρ_1	0.18123
$\cos\beta_1$	9.99525
$\cos(\lambda_1 - L_1)$	9.98063_n
$2R_1\rho_1\cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1)$	0.45512_n
R_1^2	9.99396
ρ_1^2	0.36246
R_3	9.99889
ρ_3	0.17865
$\cos\beta_3$	9.99401
$\cos(\lambda_3 - L_3)$	9.99960_n
$2R_3\rho_3\cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3)$	0.47218_n
R_3^2	9.99778
ρ_3^2	0.35730
R_1^2	0.9862
ρ_1^2	2.3039
$2R_1\rho_1\cos\beta_1\cos(\lambda_1 - L_1)$	— 2.8518
r_1^2	6.1419
r_1^2	0.78830
R_3^2	0.9949
ρ_3^2	2.2767
$2R_3\rho_3\cos\beta_3\cos(\lambda_3 - L_3)$	— 2.9661
r_3^2	6.2377
r_3^2	0.79502
r_1	0.39415
r_3	0.39751

XXII.

r_1	2.4783
r_2	2.4878
r_3	2.4975
$r_2 + r_3$	4.9853
$r_1 + r_3$	4.9758
$r_1 + r_2$	4.9661
$r_2 + r_3$	0.69769
$r_1 + r_3$	0.69686
$r_1 + r_2$	0.69602
τ_1^2	8.27573
$(r_2 + r_3)^3$	2.09307
η_1	6.18266
	5.94538
τ_2^2	8.87761
$(r_1 + r_3)^3$	2.09058
η_2	6.78703
	6.54975
τ_3^2	8.27537
$(r_1 + r_2)^3$	2.08806
η_3	6.18731
	5.95003
y_1	0.000088
y_2	0.000355
y_3	0.000089

XXIII.

$\tau_1 : \tau_2$	9.699060
$y_2 : y_1$	0.000267
n_1	9.699327
$\tau_3 : \tau_2$	9.698880
$y_2 : y_3$	0.000266
n_3	9.699146

XXIV.

ν_1	7.673520
$1 : r_2^3$	8.812540
ν_3	7.673460
n_1	9.699327
	0.000266
$\nu_1 : r_2^3$	6.486060
	3.2133
n_3	9.699146
	0.000266
$\nu_3 : r_2^3$	6.486000
	3.2131
n_1^0	9.699061
n_3^0	9.698880

XIII.

N_1	9.703122
	2.031180
n_1^0	9.699061
	0.004061
N_3	9.703135
	2.011011
n_3^0	9.698880
	0.004255
$N_1 - n_1^0$	7.671942
d_1	2.302710_n
ν_1	7.673520
$N_3 - n_3^0$	7.692124
d_3	2.131534_n
ν_3	7.673460
$d_1 (N_1 - n_1^0)$	9.974652_n
	0.232062
$d_3 (N_3 - n_3^0)$	9.823658_n
	0.150994
$d_1 \nu_1$	9.976230_n
	0.223797
$d_3 \nu_3$	9.804994_n
	0 171236
m	0.206714_n
l	0.200027_n

XIV.

$\cos\psi_2$	9.991056_n	ω	$4°25'22''.89$
R_2	9.997911	$(R_2 \sin\psi_2)^3$	7.902514
$\sin\psi_2$	9.302927	Ω	0.413672_n
$R_2 \cos\psi_2$	9.988967_n		8.316186_n
	0.205663	l	0.200027_n
m	0.206714_n	M	1.883841
	0.217747		
$\Omega \sin\omega$	9.300838_n		
$\cos\omega$	9.998705		
$\Omega \cos\omega$	0.412377_n		
$tg\,\omega$	8.888461		

XV.

Уравненіе Гаусса:

$$[1.883841] \sin^4 z = \sin(z - 4°25'22''.89)$$

XVI.

	Первая гипотеза.	Вторая гипотеза.
z_0	$4°36'32''.40$	$4°36'18''.91$
$z_0 - \omega$	$11\ \ 9\ .51$	$10\ 56\ .02$
$\sin z_0$	8.905015	8.904663
$\sin^4 z_0$	5.620060	5.618652
$M \sin^4 z_0$	7.503901	7.502493
$\sin(z_0 - \omega)$	7.511331	7.502491
$\sin(z_0 - \omega)$	0.00324587	
$M \sin^4 z_0$	0.00319081	
ε	0.00005506	
$\sin^3 z_0$	6.7150	
$\cos z_0$	9.9986	
$4M \sin^3 z_0 \cos z_0$	9.1995	
	0.0748	
$\cos(z_0 - \omega)$	0.0000	
	0.8005	
ε	5.7408	
$1 : \mu$	0.0748_n	
Δz_0	1.1300_n	
Δz_0	$-13''.49$	
z_1	$4°36'18''.91$	

XVII.

ψ_2	$168°24'42''.6$
z	$4\ 36\ 18\ .9$
$\psi_2 + z$	$173\ \ 1\ \ 1\ .5$
$\sin(\psi_2 + z)$	9.084838
R_2	9.997911
$R_2 \sin(\psi_2 + z)$	9.082749
$cosec\, z$	1.095337
$R_2 \sin\psi_2$	9.300838
ρ_2	0.178086
r_2	0.396175

Контроль:

l	$0.200027,$
r^3_2	1.188525
m	0.206714_n
	0.028629
$l : r_2^3$	9.011502_n
	1.195212
ρ_2	0.178085
	0.178086

Проведеніе гипотезъ можно считать законченнымъ.

Другой контроль:

R_2	9.997911
ρ_2	0.178086
$\cos\psi_2$	9.991056_n
$2R_2\rho_2\cos\psi_2$	0.468083_n
$R_2^{\,2}$	9.995822
$\rho_2^{\,2}$	0.356172
$R_2^{\,2}$	0.99043
$\rho_2^{\,2}$	2.27076
$2R_2\rho_2\cos\psi_2$	—2.93821
$r_2^{\,2}$	6.19940
r_2	0.792350
r_2	0.396175
	0.396175

XVIII.

ν_1	7.673520
$1:r^3_{\ 2}$	8.811475
ν_3	7.673460
n_1^0	9.699061
	0.000265
$\nu_1 : r_3^{\,2}$	6.484995
	3.2141
n_3^0	9.698880
	0.000265
$\nu_3 : r_2^{\,3}$	6.484935
	3.2139
n_1	9.699326
n_3	9.699145

XIX.

N_1	9.703122
	2.060355
n_1	9.699326
	0.003796
N_3	9.703135
	2.038805
n_3	9.699145
	0.003990

h_1	9.362382_n
N_1-n_1	7.642767
g_1	9.462604_n
h_3	8.633696
N_3-n_3	7.664330
g_3	8.283371_n
n_1	9.699326
$\cos\beta_1$	9.995247
f_2	8.794898_n
$\cos\beta_3$	9.994011
n_3	9.699145
f_1	8.506076_n
$\cos\beta_2$	9.994581
ρ_2	0.178086
f_3	8.481742_n
$f_1\cos\beta_2\cdot\rho_2$	8.678743_n
	0.009308
$(N_1-n_1)\,h_1$	7.005149_n
	1.673594
$f_1\cos\beta_2\cdot\rho_2-(N_1-n_1)\,h_1$	8.669435_n
	0.001843
$(N_3-n_3)\,h_3$	6.298026
	2.371409
$f_3\cos\beta_2\cdot\rho_2$	8.654409_n
	0.012097
$(N_1-n_1)\,g_1$	7.105371_n
	1.549038
$f_2\cos\beta_2\cdot\rho_2+(N_1-n_1)\,g_1$	8.666506_n
	0.000829
$(N_3-n_3)\,g_3$	5.947701
	2.718805
$n_1 f_2\cos\beta_1\cdot\rho_1$	8.671278_n
$n_1 f_2\cos\beta_1$	8.489471_n
ρ_1	0.181807
$n_3 f_2\cos\beta_3\cdot\rho_3$	8.667335_n
$n_3 f_2\cos\beta_3$	8.488054_n
ρ_3	0.179281

Контроль:

n_1	9.699326	$n_1 \sin\beta_1 \cdot \rho_1$	9.048850
$\sin\beta_1$	9.167717		0.278213
ρ_1	0.181807	$n_3 \sin\beta_3 \cdot \rho_3$	9.095750
			0.046900
n_3	9.699145		
$\sin\beta_3$	9.217324	$\sin\beta_2 \cdot \rho_2$	9.373963
ρ_3	0.179281	$\sin\beta_2$	9.195876
		ρ_2	0.178087
			0.178086

Опредѣленіе элементовъ.

XXV.

	t_1	t_2	t_3
$\lambda - L$	196°59′14″.0	187°17′24″.0	177°31′40″.5
$\cos\beta$	9.995247	9.994581	9.994011
ρ	0.181807	0.178086	0.179281
$\sin\beta$	9.167717	9.195876	9.217324
$\sin(\lambda - L)$	9.465619_n	9.103433_n	8.634806
$\rho\cos\beta$	0.177054	0.172667	0.173292
$\cos(\lambda - L)$	9.980626_n	9.996475_n	9.999596_n
$\rho\cos\beta\cos(\lambda - L)$	0.157680_n	0.169142_n	0.172888_n
	0.228073	0.223799	0.222687
R	9.996985	9.997911	9.998890
	0.160695	0.171231	0.173998
$r\cos b\sin(l - L)$	9.642673_n	9.276100_n	8.808098
$\cos(l - L)$	9.993024_n	9.998736_n	9.999855_n
$r\cos b\cos(l - L)$	0.385753_n	0.392941_n	0.395575_n
$tg(l - L)$	9.256920	8.883159	8.412523_n
$r\sin b$	9.349524	9.373962	9.396605
$\cos b$	9.998228	9.998030	9.997830
$r\cos b$	0.392729	0.394205	0.395720
$tg\, b$	8.956795	8.979757	9.000885
r	0.394501	0.396175	0.397890
$l - L$	190°14′31″.0	184°22′10″.4	178°31′ 8″.5
L	347 40 2 .5	355 37 37 .4	3 33 5 .2
l	177 54 33 .5	179 59 47 .8	182 4 13 .7
b	5 10 22 .5	5 27 7 .7	5 43 19 .8

XXVI.

		Контроль:	
$l_3 - l_1$	4°9′40″.2		
$tg\, b_1$	8.956795	l_3	182° 4′13″.7
$cos\,(l_3 - l_1)$	9.998854	☊	144 22 31 .1
$tg\, b_3$	9.000885	l_2	179 59 47 .8
	1.004722	l_3—☊	37 41 42 .6
$tg\, b_1\, cos\,(l_3 - l_1)$	8.955649	l_2—☊	35 37 16 .7
	0.045236	$sin\,(l_3$—☊$)$	9.786368
$tg\, b_3 - tg\, b_1\, cos\,(l_3 - l_1)$	7.996163	$tg\, i$	9.214516
$sin\,(l_3 - l_1)$	8.860711	$sin\,(l_2$—☊$)$	9.765240
$tg\, i\, sin\,(l_1$ — ☊$)$	8.956795	$tg\, b_3$	9.000884
$cos\,(l_1$—☊$)$	9.920936		9.000885
$tg\, i\, cos\,(l_1$—☊$)$	9.135452	$tg\, b_2$	8.979756
$tg\,(l_1$—☊$)$	9.821343		8.979757
$tg\, i$	9.214516		
l_1—☊	33°32′ 2″.4		
l_1	177 54 33 .5		
☊	144 22 31 .1		
i	9 18 24 .1		

XXVII.

	t_1	t_2	t_3
l—☊	33°32′ 2″.4	35°37′16″.7	37°41′42″.6
$tg\,(l$—☊$)$	9.821343	9.855212	9.888041
$cos\, i$	9.994245	9.994245	9.994245
$tg\, u$	9.827098	9.860967	9.893796
u	33°53′ 4″.4	35°58′53″.6	38° 3′47″.3

Контроль:

$b_3 - b_1$	0°32′57″.3	$cos\, b_1$	9.998228
$\frac{1}{2}\,(b_3 - b_1)$	0 16 28 .65	$cos\, b_3$	9.997830
$l_3 - l_1$	4 9 40 .2	$sin^2\, \frac{1}{2}\,(l_3 - l_1)$	7.119934
$\frac{1}{2}\,(l_3 - l_1)$	2 4 50 .1	$cos\, b_1\, cos\, b_3\, sin^2 \frac{1}{2}\,(l_3 - l_1)$	7.115992
			0.007572
$sin\, \frac{1}{2}\,(b_3 - b_1)$	7.680614	$sin^2\, \frac{1}{2}\,(b_3 - b_1)$	5.361228
			1.754764
$sin\, \frac{1}{2}\,(l_3 - l_1)$	8.559967		
		$sin^2\, \frac{1}{2}\,(u_3 - u_1)$	7.123564
		$sin\, \frac{1}{2}\,(u_3 - u_1)$	8.561782
		$\frac{1}{2}\,(u_3 - u_1)$	2°5′21″.5
			2 5 21 .5

XXVIII.

u_3-u_2	2°4′53″.7	u_3-u_1	4°10′42″.9	u_2-u_1	2°5′49″.2
r_2	0.396175	r_1	0.394501	r_1	0.394501
r_3	0.397890	r_3	0.397890	r_2	0.396175
$\sin(u_3-u_2)$	8.560176	$\sin(u_3-u_1)$	8.862521	$\sin(u_2-u_1)$	8.563377
y_1	0.000088	y_2	0.000355	y_3	0.000089
	9.354329		9.655267		9.354142
τ_1	9.137865	τ_2	9.438805	τ_3	9.137685
$\sqrt{p}$	0.216464	$\sqrt{p}$	0.216462	$\sqrt{p}$	0.216457
Окончательно:		p	0.432922		

XXIX.

r_1	0.394501	$q_1 \cos(u_3-u_1) - q_3$	7.916264
p	0.432922	$\sin(u_3-u_1)$	8.862521
r_3	0.397890	$e \sin v_1$	9.053743
$p : r_1$	0.038421	$\sin v_1$	9.888900
	1.072284	$e \cos v_1$	8.966137
$p : r_3$	0.035032	$tg\, v_1$	0.087606
	1.110718	e	9.164843
q_1	8.966137	v_1	50°44′24″.2
$\cos(u_3-u_1)$	9.998844	u_1	33 53 4 .4
$q_1 \cos(u_3-u_1)$	8.964981	u_2	35 58 53 .6
	1.048717	ω	343 8 40 .2
q_3	8.924314	u_3	38 3 47 .3
	0.040667	v_2	52 50 13 .4
		v_3	54 55 7 .1

Контроль:

$\cos v_3$	9.759471	$e \cos v_2$	8.945940
e	9.164843		
$\cos v_2$	9.781097	p	0.432922
		$1 + e \cos v_2$	0.036747
q_3	8.924314		
	8.924314	r_2	0.396175
			0.396175

XXX.

e	9.164843	$\sqrt{}$	9.936063
$1-e$	— 0.068626	e	9.164843
$1+e$	0.059247	$cosec\ 1''$	5.314425
	— 0.063937	$e\ cosec\ 1''$	4.479268

	t_1	t_2	t_3
v	50°44′24″. 2	52°50′13″. 4	54°55′ 7″. 1
$\frac{1}{2}v$	25 22 12 . 1	26 25 6 . 7	27 27 33 . 6
$tg\frac{1}{2}v$	9.675956	9.696189	9.715724
$tg\frac{1}{2}E$	9.612019	9.632252	9.651787
$\frac{1}{2}E$	22°15′29″.67	23°12′34″.31	24° 9′26″.79
E	44 30 59 . 3	46 25 8 . 6	48 18 53 . 6
$sin\ E$	9.845789	9.859979	9.873211
$e\ cosec\ 1''\ sin\ E$	4.325057	4.339247	4.352479
$e\ cosec\ 1''\ sin\ E$	5°52′17″. 7	6° 3′59″. 7	6°15′15″. 4
M	38 38 41 . 6	40 21 8 . 9	42 3 38 . 2

XXXI.

p	0.432922	$k\ cosec\ 1''$	3.550007
$1-e^2$	— 0.009379	$a^{3/2}$	0.663451
		n	2.886556
a	0.442301		
$\sqrt{a}$	0.221150	t_0	Марта 16.5

	t_1	t_2	t_3
t	8.43006	16.41192	24.39709
t_0-t	8.06994	0.08808	— 7.89709
t_0-t	0.906870	8.944877	0.897467_n
$n(t_0-t)$	3.793426	1.831433	3.784023_n
$n(t_0-t)$	1°43′34″. 8	0° 1′ 7″. 8	— 1°41′21″. 7
M_0	40 22 16 . 4	40 22 16 . 7	40°22′16″. 5

Окончательно: $M_0 = 40°22'16''.5$.

Такимъ образомъ мы опредѣлили слѣдующія значенія элементовъ орбиты:

i	9°18′24″.1	1905.0
☊	144 22 31 .1	
ω	343 8 40 .2	
a	0.442301	
e	9.164843	
t_0	1905 Марта 16.5 ср. Берл. врем.	
M_0	40°22′16″.5.	

Представленіе исходныхъ положеній небеснаго тѣла найденными элементами.

XXXII.

	t_1	t_2	t_3
t	8.43006	16.41192	24.39709
$t - t_0$	—8.06994	— 0.08808	7.89709
$t - t_0$	0.906870_n	8.944877_n	0.897467
$n\,(t - t_0)$	3.793426_n	1.831433_n	3.784023
$n\,(t - t_0)$	— 1°43′34″. 8	— 0° 1′ 7″. 8	1°41′21″. 7
M	38 38 41 . 7	40 21 8 . 7	42 3 38 . 2
$E^{(0)}$	44 30 59 . 3	46 25 8 . 6	48 18 53 . 6
$\sin E^{(0)}$	9.845789	9.859979	9.873211
$e \operatorname{cosec} 1'' \sin E^{(0)}$	4.325057	4.339247	4.352479
$e \operatorname{cosec} 1'' \sin E^{(0)}$	5°52′17″. 7	6° 3′59″. 7	6°15′15″. 4
$M^{(0)}$	38 38 41 . 6	40 21 8 . 9	42 3 38 . 2
ε	0 . 1	—0 . 2	0 . 0
$\cos E^{(0)}$	9.853	9.860	
$e \cos E^{(0)}$	9.018	9.025	
$1 - e \cos E^{(0)}$	—0.048	—0.048	
ε	9.000	9.301_n	
$\Delta E^{(0)}$	8.952	9.253_n	
$\Delta E^{(0)}$	0″. 1	—0″. 2	
E	44°30′59″. 4	46°25′ 8″. 4	48°18′53″. 6
$\frac{1}{2} E$	22 15 29 . 7	23 12 34 . 2	24 9 26 . 8

XXXIII.

$\cos E$	9.853119	9.838459	9.822845
$e \cos E$	9.017962	9.003302	8.987688
$1 - e \cos E$	—0.047800	—0.046126	—0.044411
r	0.394501	0.396175	0.397890
$tg \frac{1}{2} E$	9.612019	9.632251	9.651787
$tg \frac{1}{2} v$	9.675956	9.696188	9.715724
$\frac{1}{2} v$	25°22′12″.04	26°25′ 6″.60	27°27′33″.65
v	50 44 24 . 1	52 50 13 . 2	54 55 7 . 3
u	33 53 4 . 3	35 58 53 . 4	38 3 47 . 5

XXXIV.

$\cos i$	9.994245
$\sin i$	9.208761

	t_1	t_2	t_3
L	347°40′ 2″.5	355°37′37″.4	3°33′ 5″.2
$L - \Omega$	203 17 31 .4	211 15 6 .3	219 10 34 .1
$\sin u$	9.746261	9.769026	9.789954
r	0.394501	0.396175	0.397890
$\cos u$	9.919163	9.908060	9.896157
$r \sin u$	0.140762	0.165201	0.187844
$\sin (L - \Omega)$	9.597057_n	9.714999_n	9.800516
R	9.996985	9.997911	9.998890
$\cos (L - \Omega)$	9.963080_n	9.931913_n	9.889418
$r \sin u \cos i$	0.135007	0.159446	0.182089
	0.147375	0.192232	0.232326
$R \sin (L - \Omega)$	9.594042_n	9.712910_n	9.799406
	0.540965	0.446536	0.382683
$r \cos u$	0.313664	0.304235	0.294047
	0.254143	0.238274	0.216726
$R \cos (L - \Omega)$	9.960065_n	9.929824_n	9.8883 08
	0.353599	0.374411	0.405739

$\rho \cos\beta \sin(\lambda - \Omega)$	9.987632	9.967214	9.949763
$\cos(\lambda - \Omega)$	9.882469	9.893293	9.904029
$\rho \cos\beta \cos(\lambda - \Omega)$	0.059521	0.065961	0.077321
$tg(\lambda - \Omega)$	9.928111	9.901253	9.872442
$\rho \sin\beta$	9.349523	9.373962	9.396605
$\rho \cos\beta$	0.177052	0.172668	0.173292
$tg\,\beta$	9.172471	9.201294	9.223313
$\lambda - \Omega$	40°16′45″.8	38°32′30″.0	36°42′15″.0
λ	184 39 16 .9	182 55 1 .1	181 4 46 .1
β	8 27 39 .5	9 1 56 .3	9 29 37 .3
$\Delta\lambda$	—0″.4	0″.3	—0″.4
$\Delta\lambda \cos\beta$	—0 .4	0 .3	—0 .4
$\Delta\beta$	—0 .1	0 .0	0 .0

Такое представленіе исходныхъ положеній слѣдуетъ считать вполнѣ удовлетворительнымъ.

Необходимо замѣтить, что начиная съ 1916 года во всѣхъ астрономическихъ календаряхъ различныя величины даются не для мѣстныхъ меридіановъ, а для Гринвичскаго.

Опредѣленіе орбитъ, наклоненныхъ къ эклиптикѣ подъ очень малыми углами, по четыремъ наблюденіямъ, какъ случай спеціальный, мы въ настоящемъ курсѣ не разсматриваемъ. Поэтому слѣдующая глава посвящена опредѣленію орбитъ изъ многихъ наблюденій.

ГЛАВА XI.

Опредѣленіе орбитъ изъ многихъ наблюденій.

§ 73. Послѣдовательныя опредѣленія орбитъ. Поправка за широту солнца.

Для всякаго вновь открываемаго небеснаго тѣла (малой планеты или кометы) по первымъ его тремъ наблюденіямъ, отдѣленнымъ весьма часто чрезвычайно малыми промежутками времени, опредѣляются приближенные элементы орбиты, и на основаніи этихъ элементовъ вычисляется приближенная эфемерида, дающая прямое восхожденіе съ точностью до $0^m.1$ и склоненіе съ точностью до $1'$. Такая эфемерида служитъ для облегченія розысканія небеснаго тѣла при дальнѣйшихъ наблюденіяхъ. Однако такая эфемерида сколько-нибудь удовлетворительно представляетъ положенія небеснаго тѣла не долго и, если наблюденія малой планеты или кометы производятся въ теченіе болѣе продолжительнаго періода, то для облегченія производства ихъ необходимо вычислить новую эфемериду, основанную на элементахъ, опредѣленныхъ по другимъ тремъ наблюденіямъ, отдѣленнымъ другъ отъ друга уже довольно значительными промежутками времени. При этомъ отношенія площадей треугольниковъ могутъ быть вычислены съ вполнѣ удовлетворительною точностью по слѣдующей общей формулѣ:

$$n = \frac{r'' \sin(v''' - v'')}{r' \sin(v''' - v')},$$

въ которой значенія r', r'', v', v'', v''' вычисляются по первымъ приближеннымъ элементамъ. Конечно, при выводѣ новыхъ элементовъ мы съ самаго начала должны освободить наблюденія отъ вліянія параллакса и планетной аберраціи по формуламъ сферической астрономіи [1]).

При первомъ опредѣленіи орбиты мы совсѣмъ пренебрегали широтой B солнца по ея малости. При второмъ опредѣленіи орбиты можно учесть вліяніе широты солнца, относя положенія свѣтилъ не къ центру земли, а къ точкѣ пересѣченія плоскости эклиптики съ перпендикуляромъ, опу-

[1]) См. А. А. Ивановъ Курсъ Сферической Астрономіи. СПБ. 1911, стр. 115 и 156.

щеннымъ изъ центра земли на эту плоскость. Вполнѣ понятно, что тогда широту солнца мы въ точности можемъ считать равною нулю; долготы солнца и небеснаго тѣла останутся безъ измѣненія; къ широтѣ же небеснаго тѣла β надо будетъ придать небольшую поправку $\Delta\beta$.

Формулу для опредѣленія поправки $\Delta\beta$ мы можемъ получить на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Пусть будетъ β наблюденная, а $\beta_0 = \beta + \Delta\beta$ исправленная широта небеснаго тѣла.

Проведемъ перпендикулярно къ плоскости эклиптики плоскость черезъ центръ земли и черезъ интересующее насъ небесное тѣло. Въ этой плоскости возьмемъ систему прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ съ началомъ въ центрѣ земли и направимъ ось x-овъ параллельно линіи пересѣченія этой плоскости съ плоскостью эклиптики, а ось y-овъ по перпендикуляру къ плоскости эклиптики. Тогда координаты небеснаго тѣла представятся формулами:

$$x = \rho \cos\beta \quad \text{и} \quad y = \rho \sin\beta,$$

гдѣ ρ есть разстояніе небеснаго тѣла отъ центра земли.

Координаты проекціи центра земли на плоскость эклиптики въ этой системѣ выразятся такъ:

$$X = 0 \quad \text{и} \quad Y = R \sin B.$$

Если эту проекцію примемъ за начало новой системы координатъ, въ которой оси будутъ параллельны прежнимъ осямъ, то координаты небеснаго тѣла въ этой новой системѣ, на основаніи формулъ преобразованія координатъ, будутъ имѣть видъ:

$$x' = \rho' \cos(\beta + \Delta\beta) = x = \rho \cos\beta$$
$$y' = \rho' \sin(\beta + \Delta\beta) = y - Y = \rho \sin\beta - R \sin B,$$

гдѣ ρ' есть разстояніе небеснаго тѣла отъ упомянутой проекціи.

Умножая первое изъ этихъ уравненій на $-\sin\beta$, а второе на $\cos\beta$ и складывая произведенія, получимъ:

$$\rho' \sin(\Delta\beta) = -R \sin B \cos\beta.$$

По малости B и $\Delta\beta$ можемъ положить:

$$\sin B = B \sin 1'', \quad \sin(\Delta\beta) = \Delta\beta \sin 1'', \quad \rho' = \rho.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$\Delta\beta = -\frac{R\cos\beta}{\rho} B.$$

Вычисленіе $\Delta\beta$ вполнѣ достаточно производить при помощи трехзначныхъ логариѳмовъ.

§ 74. Объ опредѣленіи орбитъ изъ многихъ наблюденій. Составленіе нормальныхъ мѣстъ.

Эфемерида, вычисленная на основаніи элементовъ, опредѣленныхъ изъ трехъ наблюденій небеснаго тѣла, отдѣленныхъ значительными промежутками времени, въ большинствѣ случаевъ оказывается вполнѣ достаточной для облегченія дальнѣйшихъ его наблюденій. Однако для различнаго рода теоретическихъ изслѣдованій нельзя удовлетвориться значеніями и этихъ элементовъ вслѣдствіе ошибокъ исходныхъ наблюденій небеснаго тѣла. Поэтому является необходимость вычислить вѣроятнѣйшія значенія элементовъ орбиты изъ совокупности всѣхъ наблюденій даннаго небеснаго тѣла, т. е. опредѣлить такія значенія элементовъ, чтобы вычисленныя по нимъ положенія небеснаго тѣла возможно лучше согласовались со всѣми наблюденными его положеніями. При этомъ представляется болѣе выгоднымъ пользоваться экваторіальной, а не эклиптикальной системой координатъ.

Такъ какъ отдѣльныя наблюденія могутъ заключать иногда довольно значительныя ошибки, особенно въ томъ случаѣ, когда наблюдаемое тѣло есть комета, то при опредѣленіи вѣроятнѣйшихъ элементовъ изъ многихъ наблюденій нѣсколько близкихъ другъ къ другу наблюденій соединяютъ въ одно такъ называемое *нормальное мѣсто*, точность котораго, конечно, значительно выше точности отдѣльныхъ наблюденій. Покажемъ же, какимъ образомъ составляются нормальныя мѣста. Прежде всего по приближеннымъ элементамъ вычисляемъ эфемериду небеснаго тѣла. Положимъ, что α_c и δ_c суть вычисленныя для нѣкотораго момента t прямое восхожденіе и склоненіе небеснаго тѣла. Наблюденныя координаты, соотвѣтствующія тому же моменту, назовемъ буквами α_0 и δ_0. Составимъ разности:

$$\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha_c, \qquad \Delta\delta = \delta_0 - \delta_c.$$

Обозначимъ подобныя разности для моментовъ $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ соотвѣтственно такъ: $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3, \ldots \Delta\alpha_n$ и $\Delta\delta_1, \Delta\delta_2, \Delta\delta_3, \ldots \Delta\delta_n$.

Если промежутокъ времени $t_n - t_1$ не особенно великъ, то эти разности можно представить въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по степенямъ времени, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha &= a + b\,(t-\tau) + c\,(t-\tau)^2 + \ldots \\ \Delta\delta &= a' + b'\,(t-\tau) + c'\,(t-\tau)^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (256)$$

Здѣсь τ есть нѣкоторый моментъ, который лежитъ гдѣ-нибудь въ промежуткѣ между t_1 и t_n. Если приближенные элементы не слишкомъ

грубы, то коэффиціенты $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots$ малы и притомъ съ увеличеніемъ показателя степени при $t-\tau$ коэффиціенты быстро уменьшаются.

Примѣнимъ уравненія (256) къ моментамъ $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$. Тогда получимъ для $\Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha_1 = a + b(t_1-\tau) + c(t_1-\tau)^2 + \ldots$$
$$\Delta\alpha_2 = a + b(t_2-\tau) + c(t_2-\tau)^2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta\alpha_n = a + b(t_n-\tau) + c(t_n-\tau)^2 + \ldots$$

Подобнымъ же образомъ для $\Delta\delta$ получимъ:

$$\Delta\delta_1 = a' + b'(t_1-\tau) + c'(t_1-\tau)^2 + \ldots$$
$$\Delta\delta_2 = a' + b'(t_2-\tau) + c'(t_2-\tau)^2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta\delta_n = a' + b'(t_n-\tau) + c'(t_n-\tau)^2 + \ldots$$

Рѣшая эти уравненія по способу наименьшихъ квадратовъ, мы можемъ опредѣлить коэффиціенты $a, b, c, \ldots\, a', b', c', \ldots$ Когда эти коэффиціенты найдены, то составленіе нормальнаго мѣста, замѣняющаго собою всѣ наблюденія, произведенныя въ моменты $t_1, t_2, t_3, \ldots\, t_n$, не представляетъ никакого затрудненія. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (256) показываютъ, что при $t=\tau$ поправки $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ выражаются такъ: $\Delta\alpha = a$, $\Delta\delta = a'$. Поэтому, если $(\alpha_c)_\tau$ и $(\delta_c)_\tau$ суть прямое восхожденіе и склоненіе небеснаго тѣла, вычисленныя для момента τ, то нормальное мѣсто для этого момента будетъ опредѣляться координатами:

$$(\alpha_c)_\tau + a \qquad \text{и} \qquad (\delta_c)_\tau + a'.$$

Въ томъ случаѣ, когда приближенные элементы уже достаточно близки къ истиннымъ, коэффиціенты c и c' можно считать равными нулю, и тогда составленіе нормальнаго мѣста значительно упрощается.

Дѣйствительно, при этомъ условіи мы будемъ имѣть такія уравненія:

$$\Delta\alpha_1 = a + b(t_1-\tau) \qquad \Delta\delta_1 = a' + b'(t_1-\tau)$$
$$\Delta\alpha_2 = a + b(t_2-\tau) \qquad \Delta\delta_2 = a' + b'(t_2-\tau)$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta\alpha_n = a + b(t_n-\tau) \qquad \Delta\delta_n = a' + b'(t_n-\tau).$$

За моментъ τ примемъ моментъ, опредѣляемый уравненіемъ:

$$\tau = \frac{1}{n}(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n).$$

Тогда черезъ сложеніе предыдущихъ уравненій, легко находимъ:

$$a = \frac{1}{n}(\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3 + \ldots + \Delta\alpha_n)$$

$$a' = \frac{1}{n}(\Delta\delta_1 + \Delta\delta_2 + \Delta\delta_3 + \ldots + \Delta\delta_n).$$

Для составленія нормальнаго мѣста эти поправки a и a' надо прибавить къ координатамъ $(\alpha_c)_\tau$ и $(\delta_c)_\tau$, вычисленнымъ для момента τ, причемъ на практикѣ вмѣсто этихъ координатъ берутся координаты для момента, имѣющагося въ эфемеридѣ и ближайшаго къ моменту τ.

Замѣтимъ, что при сравненіи наблюденій съ эфемеридой нужно предварительно освободить наблюденія отъ вліянія прецессіи, нутаціи, аберраціи и параллакса по вышеуказаннымъ формуламъ.

Интересныя подробности по вопросу объ освобожденіи наблюденій малыхъ планетъ и кометъ отъ вліянія прецессіи, нутаціи и аберраціи можно найти въ статьѣ: «F. Ristenpart. Ueber Differentialreduktion vom scheibaren auf den mittleren Ort mit besonderer Berücksichtigung der Kometen- und Planetenbeobachtungen», помѣщенной въ журналѣ «Astronomische Nachrichten», B. 160, №№ 3832—33.

§ 75. Условныя уравненія, служащія для опредѣленія поправокъ [redacted]

Вычисленныя по приближеннымъ элементамъ прямое восхожденіе α_c и склоненіе δ_c небеснаго тѣла мы должны считать функціями времени и элементовъ орбиты. Такимъ образомъ, имѣя въ виду случай эллиптической орбиты, мы можемъ написать:

$$\alpha_c = f_1(i, \Omega, \omega, a, e, T, t)$$
$$\delta_c = f_2(i, \Omega, \omega, a, e, T, t).$$

Наблюденныя координаты α_0 и δ_0 нѣсколько отличаются отъ вычисленныхъ α_c и δ_c и потому элементами $i, \Omega, \omega, a, e, T$ представлены быть не могутъ. Будемъ же искать такія поправки Δi, $\Delta\Omega$, $\Delta\omega$, Δa, Δe, ΔT къ этимъ элементамъ, чтобы новые элементы $i + \Delta i$, $\Omega + \Delta\Omega$, $\omega + \Delta\omega$, $a + \Delta a$, $e + \Delta e$, $T + \Delta T$ точно представили наблюденныя координаты α_0 и δ_0. Это условіе напишется такъ:

$$\alpha_0 = f_1(i + \Delta i, \Omega + \Delta\Omega, \omega + \Delta\omega, a + \Delta a, e + \Delta e, T + \Delta T, t)$$

$$\delta_0 = f_2(i + \Delta i, \Omega + \Delta\Omega, \omega + \Delta\omega, a + \Delta a, e + \Delta e, T + \Delta T, t).$$

Пользуясь строкой Тэйлора и удерживая лишь первыя степени поправокъ Δi, $\Delta\Omega$, $\Delta\omega$, Δa, Δe, ΔT, получаемъ:

$$\alpha_0 = f_1(i, \Omega, \omega, a, e, T, t) + \frac{\partial f_1}{\partial i}\Delta i + \frac{\partial f_1}{\partial \Omega}\Delta\Omega + \frac{\partial f_1}{\partial \omega}\Delta\omega + $$

$$+ \frac{\partial f_1}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f_1}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial f_1}{\partial T}\Delta T$$

$$\delta_0 = f_2(i, \Omega, \omega, a, e, T, t) + \frac{\partial f_2}{\partial i}\Delta i + \frac{\partial f_2}{\partial \Omega}\Delta\Omega + \frac{\partial f_2}{\partial \omega}\Delta\omega + $$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f_2}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial f_2}{\partial T}\Delta T.$$

На основаніи уравненій (217) можемъ написать:

$$\alpha_0 - \alpha_c = \frac{\partial\alpha}{\partial i}\Delta i + \frac{\partial\alpha}{\partial\Omega}\Delta\Omega + \frac{\partial\alpha}{\partial\omega}\Delta\omega + \frac{\partial\alpha}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\alpha}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial\alpha}{\partial T}\Delta T$$

$$\delta_0 - \delta_c = \frac{\partial\delta}{\partial i}\Delta i + \frac{\partial\delta}{\partial\Omega}\Delta\Omega + \frac{\partial\delta}{\partial\omega}\Delta\omega + \frac{\partial\delta}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\delta}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial\delta}{\partial T}\Delta T.$$

Обыкновенно разность $\alpha_0 - \alpha_c$ при сравненіи наблюденій съ эфемеридой умножается на $\cos\delta$, такъ какъ, въ какой бы части неба ни наблюдалось небесное тѣло, отклоненіе наблюденнаго его положенія отъ вычисленнаго, считаемое по дугѣ большого круга, должно быть приблизительно одинаковымъ, или, если мы это отклоненіе разложимъ на двѣ взаимно перпендикулярныя составляющія — одну по кругу склоненій, а другую по малому кругу, параллельному экватору, то приблизительно одинаковыми для различныхъ положеній свѣтилъ будутъ отклоненія $\delta_0 - \delta_c$ и $(\alpha_0 - \alpha_c)\cos\delta$.

Поэтому, полагая $\alpha_0 - \alpha_c = \Delta\alpha$ и $\delta_0 - \delta_c = \Delta\delta$, окончательно будемъ имѣть:

$$\Delta\alpha\cos\delta = \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial i}\Delta i + \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial\Omega}\Delta\Omega + \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial\omega}\Delta\omega + \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial a}\Delta a + $$

$$+ \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial e}\Delta e + \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial T}\Delta T$$

$$\Delta\delta = \frac{\partial\delta}{\partial i}\Delta i + \frac{\partial\delta}{\partial\Omega}\Delta\Omega + \frac{\partial\delta}{\partial\omega}\Delta\omega + \frac{\partial\delta}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\delta}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial\delta}{\partial T}\Delta T.$$

Сколько будетъ составлено нормальныхъ мѣстъ, столько же мы получимъ условныхъ уравненій для $\Delta\alpha\cos\delta$ и для $\Delta\delta$. Если мы будемъ знать дифференціальные коэффиціенты $\frac{\partial\alpha}{\partial i}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial\Omega}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial\omega}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial a}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial e}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial T}$, то, рѣ-

шая условныя уравненія по способу наименьшихъ квадратовъ, найдемъ поправки Δi, $\Delta \Omega$, $\Delta\omega$, Δa, Δe, ΔT и, прибавляя ихъ къ приближеннымъ элементамъ, опредѣлимъ окончательные вѣроятнѣйшіе элементы.

Въ случаѣ параболической орбиты условныя уравненія принимаютъ слѣдующій видъ:

$$\Delta\alpha \cos\delta = \cos\delta \frac{\partial\alpha}{\partial i}\Delta i + \cos\delta \frac{\partial\alpha}{\partial\Omega}\Delta\Omega + \cos\delta \frac{\partial\alpha}{\partial\omega}\Delta\omega +$$

$$+ \cos\delta \frac{\partial\alpha}{\partial q}\Delta q + \cos\delta \frac{\partial\alpha}{\partial T}\Delta T$$

$$\Delta\delta = \frac{\partial\delta}{\partial i}\Delta i + \frac{\partial\delta}{\partial\Omega}\Delta\Omega + \frac{\partial\delta}{\partial\omega}\Delta\omega + \frac{\partial\delta}{\partial q}\Delta q + \frac{\partial\delta}{\partial T}\Delta T.$$

§ 76. Вычисленіе производныхъ отъ прямого восхожденія и склоненія по прямолинейнымъ координатамъ.

Развивая въ главѣ VII формулы, служащія для вычисленія эфемериды небеснаго тѣла, мы имѣли такія соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} \rho\cos\delta\cos\alpha &= x + X \\ \rho\cos\delta\sin\alpha &= y + Y \\ \rho\sin\delta &= z + Z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (257)$$

Здѣсь x, y, z суть прямолинейныя прямоугольныя геліоцентрическія экваторіальныя координаты небеснаго тѣла, а X, Y, Z — геоцентрическія координаты солнца. Мы видимъ, что α и δ суть функціи отъ x, y, z, которыя въ свою очередь зависятъ отъ элементовъ орбиты. Слѣдовательно, если буквой θ мы назовемъ любой изъ элементовъ, то будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} &= \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} + \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\delta}{\partial\theta} &= \frac{\partial\delta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial\delta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} + \frac{\partial\delta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (258)$$

Значитъ, прежде всего намъ надо составить производныя:

$$\cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial x},\ \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial y},\ \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial z},\ \frac{\partial\delta}{\partial x},\ \frac{\partial\delta}{\partial y},\ \frac{\partial\delta}{\partial z}.$$

Эти производныя будутъ выражаться однѣми и тѣми же формулами какъ для эллиптической, такъ и для параболической орбиты. Чтобы составить эти производныя, будемъ дифференцировать уравненія (257),

считая при этомъ X, Y, Z постоянными. Тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha\, d\rho - \rho\sin\delta\cos\alpha\, d\delta - \rho\cos\delta\sin\alpha\, d\alpha &= dx \\ \cos\delta\sin\alpha\, d\rho - \rho\sin\delta\sin\alpha\, d\delta + \rho\cos\delta\cos\alpha\, d\alpha &= dy \\ \sin\delta\, d\rho + \rho\cos\delta\, d\delta &= dz. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (259)$$

Исключимъ изъ первыхъ двухъ уравненій $d\rho$ при помощи третьяго уравненія. Третье уравненіе даетъ:

$$d\rho = \frac{dz}{\sin\delta} - \rho\, cotg\,\delta\, d\delta.$$

Подставляя это выраженіе $d\rho$ въ первыя два изъ уравненій (259), получаемъ:

$$-\frac{\rho\cos^2\delta\cos\alpha}{\sin\delta}\, d\delta - \rho\sin\delta\cos\alpha\, d\delta - \rho\cos\delta\sin\alpha\, d\alpha = dx - \cos\alpha\, cotg\,\delta\, dz$$

$$-\frac{\rho\cos^2\delta\sin\alpha}{\sin\delta}\, d\delta - \rho\sin\delta\sin\alpha\, d\delta + \rho\cos\delta\cos\alpha\, d\alpha = dy - \sin\alpha\, cotg\,\delta\, dz.$$

Соединяя здѣсь члены съ $d\delta$, находимъ:

$$-\frac{\rho\cos\alpha}{\sin\delta}\, d\delta - \rho\sin\alpha\cos\delta\, d\alpha = dx - \cos\alpha\, cotg\,\delta\, dz$$

$$-\frac{\rho\sin\alpha}{\sin\delta}\, d\delta + \rho\cos\alpha\cos\delta\, d\alpha = dy - \sin\alpha\, cotg\,\delta\, dz.$$

Рѣшая эти уравненія относительно $\cos\delta\, d\alpha$ и $d\delta$, получаемъ:

$$\cos\delta\, d\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\rho}\, dx + \frac{\cos\alpha}{\rho}\, dy$$

$$d\delta = -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\rho}\, dx - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\rho}\, dy + \frac{\cos\delta}{\rho}\, dz$$

Отсюда уже безъ всякаго труда получаемъ производныя отъ прямого восхожденія и склоненія по прямолинейнымъ координатамъ.

Эти производныя суть:

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial x} &= -\frac{\sin\alpha}{\rho} & \frac{\partial\delta}{\partial x} &= -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\rho} \\ \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial y} &= \frac{\cos\alpha}{\rho} & \frac{\partial\delta}{\partial y} &= -\frac{\sin\alpha\sin\delta}{\rho} \\ \cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial\delta}{\partial z} &= \frac{\cos\delta}{\rho}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (260)$$

§ 77. Производныя отъ прямолинейныхъ координатъ по r и v и по элементамъ i, Ω и ω.

Изъ формулъ (258) заключаемъ, что намъ необходимо теперь вычислить производныя отъ прямолинейныхъ координатъ по элементамъ. Прямоугольныя координаты x, y, z выражаются формулами:

$$x = r \sin a \sin (A + v + \omega)$$
$$y = r \sin b \sin (B + v + \omega)$$
$$z = r \sin c \sin (C + v + \omega),$$

гдѣ Гауссовы постоянныя A, B, C, a, b, c опредѣляются изъ уравненій:

$$\sin a \sin A = \cos \Omega$$
$$\sin a \cos A = - \cos i \sin \Omega$$
$$\cos a = \sin i \sin \Omega$$
$$\sin b \sin B = \sin \Omega \cos \varepsilon$$
$$\sin b \cos B = \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon$$
$$\cos b = - \cos \Omega \cos \varepsilon \sin i - \sin \varepsilon \cos i$$
$$\sin c \sin C = \sin \Omega \sin \varepsilon$$
$$\sin c \cos C = \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon$$
$$\cos c = - \cos \Omega \sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon.$$

Составляя полные дифференціалы dx, dy, dz, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{x}{r} dr + x \operatorname{cotg} (A + v + \omega) (dv + d\omega) + \frac{\partial x}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial x}{\partial i} di \\ dy &= \frac{y}{r} dr + y \operatorname{cotg} (B + v + \omega) (dv + d\omega) + \frac{\partial y}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial y}{\partial i} di \\ dz &= \frac{z}{r} dr + z \operatorname{cotg} (C + v + \omega) (dv + d\omega) + \frac{\partial z}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial z}{\partial i} di. \end{aligned}\right\} \ldots (261)$$

Изъ этихъ формулъ мы тотчасъ же выводимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r}, \\ &\frac{\partial x}{\partial v} = x \operatorname{cotg} (A + v + \omega), \frac{\partial y}{\partial v} = y \operatorname{cotg} (B + v + \omega), \\ &\frac{\partial z}{\partial v} = z \operatorname{cotg} (C + v + \omega). \end{aligned}\right\} \ldots . (262)$$

Далѣе, также непосредственно изъ формулъ (261) заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \omega} &= x \operatorname{cotg}(A + v + \omega)\\ \frac{\partial y}{\partial \omega} &= y \operatorname{cotg}(B + v + \omega)\\ \frac{\partial z}{\partial \omega} &= z \operatorname{cotg}(C + v + \omega).\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (263)$$

Чтобы вычислить производныя $\frac{\partial x}{\partial \Omega}, \frac{\partial y}{\partial \Omega}, \frac{\partial z}{\partial \Omega}$ и $\frac{\partial x}{\partial i}, \frac{\partial y}{\partial i}, \frac{\partial z}{\partial i}$, представимъ координаты x, y, z въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}x &= r\,[\cos(v + \omega)\cos\Omega - \sin(v + \omega)\sin\Omega\cos i]\\ y &= r\,[\cos(v + \omega)\sin\Omega\cos\varepsilon +\\ &+ \sin(v + \omega)\{\cos\Omega\cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon\}]\\ z &= r\,[\cos(v + \omega)\sin\Omega\sin\varepsilon +\\ &+ \sin(v + \omega)\{\cos\Omega\cos i\sin\varepsilon + \sin i\cos\varepsilon\}].\end{aligned}\right\} \ldots (264)$$

Пользуясь этими уравненіями, получаемъ:

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -\,r\,[\cos(v + \omega)\sin\Omega + \sin(v + \omega)\cos\Omega\cos i]$$

$$\frac{\partial y}{\partial \Omega} = r\,[\cos(v + \omega)\cos\Omega\cos\varepsilon - \sin(v + \omega)\sin\Omega\cos i\cos\varepsilon]$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Omega} = r\,[\cos(v + \omega)\cos\Omega\sin\varepsilon - \sin(v + \omega)\sin\Omega\cos i\sin\varepsilon].$$

Эти производныя на основаніи уравненій (264) легко можемъ представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{\partial x}{\partial -} = -\,y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon,\ \ \frac{\partial y}{\partial \Omega} = x\cos\varepsilon,\ \ \frac{\partial z}{\partial \Omega} = x\sin\varepsilon\ \ldots (265)$$

Далѣе, беря производныя отъ x, y, z по i, находимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial i} &= r\sin(v + \omega)\sin\Omega\sin i\\ \frac{\partial y}{\partial i} &= -\,r\sin(v + \omega)\,[\cos\Omega\sin i\cos\varepsilon + \cos i\sin\varepsilon]\\ \frac{\partial z}{\partial i} &= r\sin(v + \omega)\,[-\cos\Omega\sin i\sin\varepsilon + \cos i\cos\varepsilon].\end{aligned}\right\} \ldots (266)$$

Имѣя въ виду выраженія для $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, мы можемъ вмѣсто формулъ (266) написать такія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial i} &= r \sin(v+\omega)\cos a \\ \frac{\partial y}{\partial i} &= r \sin(v+\omega)\cos b \\ \frac{\partial z}{\partial i} &= r \sin(v+\omega)\cos c.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (267)$$

Формулы (260), (263), (265) и (267) даютъ возможность вычислить слѣдующіе дифференціальные коэффиціенты:

$$\cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial i},\ \cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial\omega},\ \cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial\Omega},\ \text{и}\ \frac{\partial\delta}{\partial i},\ \frac{\partial\delta}{\partial\omega},\ \frac{\partial\delta}{\partial\Omega}.$$

Всѣ полученныя до сихъ поръ формулы одинаково справедливы какъ для эллиптической, такъ и для параболической орбиты.

§ 78. Эллиптическая орбита. Вычисленіе производныхъ отъ прямолинейныхъ координатъ по элементамъ a, e и T.

Теперь намъ осталось составить производныя отъ x, y, z по элементамъ a, e и T. Отъ этихъ элементовъ зависятъ r и v. Поэтому имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial a} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial e} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial e} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial e} \\ \frac{\partial x}{\partial T} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial T} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial T}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (268)$$

Совершенно подобныя же формулы мы могли бы написать для производныхъ отъ y и z по элементамъ a, e и T. Что касается производныхъ $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, то онѣ вычисляются по формуламъ (262).

Выведемъ теперь формулы для опредѣленія $\frac{\partial r}{\partial a}$, $\frac{\partial r}{\partial e}$, $\frac{\partial r}{\partial T}$ и $\frac{\partial v}{\partial a}$, $\frac{\partial v}{\partial e}$, $\frac{\partial v}{\partial T}$. Возьмемъ уравненіе, связывающее радіусъ-векторъ съ эксцентрической аномаліей, а именно:

$$r = a\,(1 - e\cos E)$$

и продифференцируемъ его:

$$dr = (1 - e\cos E)\,da + ae\sin E\,dE - a\cos E\,de.$$

Такъ какъ

$$1 - e \cos E = \frac{r}{a}, \quad a \sin E = \frac{r \sin v}{\sqrt{1 - e^2}},$$

то

$$dr = \frac{r}{a} da + \frac{r e \sin v}{\sqrt{1 - e^2}} dE - a \cos E \, de \quad . \; . \; . \; . \; . \; (269)$$

Постараемся замѣнить здѣсь dE черезъ da, de и dT.

Для этого воспользуемся уравненіемъ Кеплера:

$$E - e \sin E = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} (t - T),$$

причемъ $M_{1,\,2}$ мы приняли равнымъ единицѣ.

Дифференцируя это уравненіе, получаемъ:

$$(1 - e \cos E) \, dE - \sin E \, de = - \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} dT - \frac{3}{2} \frac{k}{a^{\frac{5}{2}}} (t - T) \, da.$$

Отсюда

$$\frac{r}{a} dE = \sin E \, de - \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} dT - \frac{3}{2} \frac{k}{a^{\frac{5}{2}}} (t - T) \, da$$

или

$$r \, dE = a \sin E \, de - \frac{k}{\sqrt{a}} dT - \frac{3}{2} \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} (t - T) \, da.$$

Подставляя это выраженіе для $r \, dE$ въ уравненіе (269), получаемъ:

$$dr = \left[\frac{r}{a} - \frac{3}{2} \frac{k e \sin v}{a^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - e^2}} (t - T)\right] da +$$

$$+ \left[\frac{a e \sin v \sin E}{\sqrt{1 - e^2}} - a \cos E\right] de - \frac{k e \sin v}{\sqrt{a (1 - e^2)}} dT.$$

Преобразуемъ коэффиціентъ при de. Мы имѣли такое соотношеніе:

$$a \sin E = \frac{r \sin v}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Здѣсь замѣнимъ r его выраженіемъ:

$$r = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos v}.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$a \sin E = \frac{a\sqrt{1-e^2} \sin v}{1 + e \cos v}.$$

Далѣе, сравнивая два выраженія для r, а именно:

$$r = a\,(1 - e \cos E) \quad \text{и} \quad r = \frac{a\,(1-e^2)}{1 + e \cos v},$$

легко получаемъ

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v}.$$

Принимая во вниманіе только что найденныя выраженія количествъ $a \sin E$ и $\cos E$, мы коэффиціенту при de придадимъ видъ:

$$\frac{ae \sin v \sin E}{\sqrt{1-e^2}} - a \cos E = \frac{a\,e \sin^2 v}{1 + e \cos v} - \frac{a\,(\cos v + e)}{1 + e \cos v} =$$

$$= \frac{a\,[e - e \cos^2 v - \cos v - e]}{1 + e \cos v} = - \frac{a \cos v\,(1 + e \cos v)}{1 + e \cos v} = - a \cos v.$$

Такимъ образомъ получаемъ:

$$dr = \left[\frac{r}{a} - \frac{3}{2}\,\frac{ke \sin v}{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-e^2}}\,(t - T)\right] da - a \cos v\, de - \frac{ke \sin v}{\sqrt{a\,(1-e^2)}}\, dT \ldots (270)$$

Изъ этого уравненія тотчасъ же имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial a} &= \frac{r}{a} - \frac{3}{2}\,\frac{ke \sin v}{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-e^2}}\,(t - T) \\ \frac{\partial r}{\partial e} &= - a \cos v \\ \frac{\partial r}{\partial T} &= - \frac{ke \sin v}{\sqrt{a\,(1-e^2)}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (271)$$

Выведемъ теперь производныя $\frac{\partial v}{\partial a}$, $\frac{\partial v}{\partial e}$, $\frac{\partial v}{\partial T}$. Для этого воспользуемся уравненіемъ:

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1 + e \cos v},$$

изъ котораго выводимъ

$$e \cos v = \frac{a\,(1-e^2)}{r} - 1.$$

Дифференцируя, находимъ:

$$\cos v\, de - e \sin v\, dv = \frac{1-e^2}{r}\, da - \frac{2ae}{r}\, de - \frac{a(1-e^2)}{r^2}\, dr.$$

Отсюда

$$dv = -\frac{1-e^2}{re \sin v}\, da + \frac{1}{e \sin v}\left[\cos v + \frac{2ae}{r}\right] de + \frac{a(1-e^2)}{r^2 e \sin v}\, dr.$$

Имѣя въ виду выраженіе (270) для dr, получаемъ:

$$dv = \left[-\frac{1-e^2}{re \sin v} + \frac{1-e^2}{re \sin v} - \frac{3}{2}\,\frac{k\sqrt{1-e^2}}{r^2\sqrt{a}}\,(t-T)\right] da +$$

$$+ \frac{1}{e \sin v}\left[\cos v + \frac{2ae}{r} - \frac{a^2(1-e^2)\cos v}{r^2}\right] de - \frac{k\sqrt{a(1-e^2)}}{r^2}\, dT$$

или

$$dv = -\frac{3}{2}\,\frac{k\sqrt{1-e^2}}{r^2\sqrt{a}}\,(t-T)\, da +$$

$$+ \frac{1}{e \sin v}\left[\cos v + \frac{2ae}{r} - \frac{a^2(1-e^2)\cos v}{r^2}\right] de - \frac{k\sqrt{a(1-e^2)}}{r^2}\, dT.$$

Займемся преобразованіемъ коэффиціента при de. Имѣемъ:

$$\cos v + \frac{2ae}{r} - \frac{a^2(1-e^2)\cos v}{r^2} =$$

$$= \cos v + \frac{2e(1+e\cos v)}{1-e^2} - \frac{(1+e\cos v)^2 \cos v}{(1-e^2)} =$$

$$= \frac{\cos v(1-e^2) + 2e(1+e\cos v) - (1+2e\cos v + e^2\cos^2 v)\cos v}{1-e^2} =$$

$$= \frac{\cos v - e^2\cos v + 2e + 2e^2\cos v - \cos v - 2e\cos^2 v - e^2\cos^3 v}{1-e^2} =$$

$$= \frac{2e + e^2\cos v - 2e\cos^2 v - e^2\cos^3 v}{1-e^2} = \frac{2e(1-\cos^2 v) + e^2\cos v(1-\cos^2 v)}{1-e^2} =$$

$$= \frac{2e\sin^2 v + e^2\cos v \sin^2 v}{1-e^2} = \frac{e\sin^2 v(2+e\cos v)}{1-e^2}.$$

Послѣ этого будемъ имѣть:

$$dv = -\frac{3}{2}\,\frac{k\sqrt{1-e^2}}{r^2\sqrt{a}}\,(t-T)\, da +$$

$$+ (2+e\cos v)\frac{\sin v}{1-e^2}\, de - \frac{k\sqrt{a(1-e^2)}}{r^2}\, dT.$$

Отсюда непосредственно получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial a} &= -\frac{3}{2}\,\frac{k\sqrt{1-e^2}}{r^2\sqrt{a}}\,(t-T) \\ \frac{\partial v}{\partial e} &= (2+e\cos v)\,\frac{\sin v}{1-e^2} \\ \frac{\partial v}{\partial T} &= -\frac{k\sqrt{a(1-e^2)}}{r^2}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (272)$$

Формулы (262), (268) и имъ подобныя съ замѣною x на y и z, формулы (271) и (272) служатъ для вычисленія производныхъ отъ прямолинейныхъ координатъ по a, e и T. Если же сюда прибавимъ еще формулы (260), то будемъ имѣть возможность вычислить дифференціальные коэффиціенты:

$$\cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial a},\ \cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial e},\ \cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial T} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\delta}{\partial a},\ \frac{\partial\delta}{\partial e},\ \frac{\partial\delta}{\partial T}\,.$$

§ 79. Параболическая орбита. Вычисленіе производныхъ отъ прямолинейныхъ координатъ по элементамъ q и T.

Формулы (260) и (262) справедливы также и для параболической орбиты. Что же касается r и v, то въ случаѣ движенія небеснаго тѣла по пароболѣ, они зависятъ отъ элементовъ q и T, а потому намъ надо составить производныя $\frac{\partial r}{\partial q}$, $\frac{\partial r}{\partial T}$ и $\frac{\partial v}{\partial q}$, $\frac{\partial v}{\partial T}$. Эти производныя выражаются такими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q} &= \frac{\partial x}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial q} \\ \frac{\partial x}{\partial T} &= \frac{\partial x}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial T} + \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial T}\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (273)$$

къ которымъ надо прибавить совершенно подобныя же формулы для опредѣленія $\frac{\partial y}{\partial q}$, $\frac{\partial y}{\partial T}$ и $\frac{\partial z}{\partial q}$, $\frac{\partial z}{\partial T}$.

Чтобы вывести формулы для вычисленія $\frac{\partial v}{\partial q}$ и $\frac{\partial v}{\partial T}$, обратимся къ извѣстному уравненію:

$$\frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = tg\,\frac{1}{2}\,v + \frac{1}{3}\,tg^3\,\frac{1}{2}\,v.$$

Перепишемъ его въ такомъ видѣ:

$$\frac{k(t-T)}{\sqrt{2}} = q^{\frac{3}{2}}\left(tg\,\frac{1}{2}\,v + \frac{1}{3}\,tg^3\,\frac{1}{2}\,v\right).$$

Продифференцируемъ это уравненіе, разсматривая въ немъ T, q и v, какъ перемѣнныя. Тогда получимъ:

$$-\frac{kdT}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{q}\left(tg\,\frac{1}{2}\,v + \frac{1}{3}\,tg^3\,\frac{1}{2}\,v\right)dq +$$

$$+\frac{1}{2}\,q^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{cos^2\,\frac{1}{2}\,v} + \frac{tg^2\,\frac{1}{2}\,v}{cos^2\,\frac{1}{2}\,v}\right)dv.$$

Замѣняя

$$tg\,\frac{1}{2}\,v + \frac{1}{3}\,tg^3\,\frac{1}{2}\,v$$

его выраженіемъ $\frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}$ и дѣлая простыя преобразованія въ коэффиціентѣ при dv, получаемъ:

$$-\frac{kdT}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\,\frac{k\,(t-T)}{q\sqrt{2}}\,dq + \frac{1}{2}\,q^{\frac{3}{2}}\,sec^4\,\frac{1}{2}\,v\,dv.$$

Но мы знаемъ, что

$$r = q\,sec^2\,\frac{1}{2}\,v$$

и слѣдовательно

$$sec^4\,\frac{1}{2}\,v = \frac{r^2}{q^2}.$$

Поэтому предыдущее уравненіе представляемъ въ видѣ:

$$-\frac{kdT}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\,\frac{k\,(t-T)}{q\sqrt{2}}\,dq + \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{\sqrt{q}}\,dv.$$

Отсюда выводимъ dv, а именно:

$$dv = -\frac{k\sqrt{2q}}{r^2}\,dT - \frac{3k\,(t-T)}{r^2\sqrt{2q}}\,dq \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(274)$$

Изъ этого уравненія непосредственно получаемъ производныя $\frac{\partial v}{\partial T}$ и $\frac{\partial v}{\partial q}$, которыя выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial T} &= -\frac{k\sqrt{2q}}{r^2} \\ \frac{\partial v}{\partial q} &= -\frac{3k\,(t-T)}{r^2\sqrt{2q}}. \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(275)$$

Чтобы составить производныя $\frac{\partial r}{\partial T}$ и $\frac{\partial r}{\partial q}$, возьмемъ уравненіе параболы въ полярныхъ координатахъ:

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}$$

и продифференцируемъ его. Тогда получимъ:

$$dr = \frac{dq}{\cos^2 \frac{1}{2} v} + \frac{q \sin \frac{1}{2} v}{\cos^3 \frac{1}{2} v} dv.$$

При помощи уравненія (274) находимъ:

$$dr = \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} v} - \frac{3k\sqrt{q}\,(t-T) \sin \frac{1}{2} v}{r^2 \sqrt{2} \cos^3 \frac{1}{2} v}\right] dq - \frac{kq^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \sin \frac{1}{2} v}{r^2 \cos^3 \frac{1}{2} v} dT.$$

Замѣняя r^2 равной ему величиной $\frac{q^2}{\cos^4 \frac{1}{2} v}$, будемъ имѣть:

$$dr = \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} v} - \frac{3k(t-T) \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v}{q^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}\right] dq - \frac{k\sqrt{2} \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v}{\sqrt{q}} dT$$

или

$$dr - \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} v} - \frac{3k(t-T) \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v}{q^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}\right] dq - \frac{k \sin v}{\sqrt{2q}} dT.$$

Преобразуемъ коэффиціентъ при dq. Имѣемъ:

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} v} - \frac{3k(t-T) \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v}{q^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}} =$$

$$= 1 + tg^2 \frac{1}{2} v - 3\, tg \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v - tg^3 \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v =$$

$$- 1 + tg^2 \frac{1}{2} v - 3 \sin^2 \frac{1}{2} v - \sin^2 \frac{1}{2} v\, tg^2 \frac{1}{2} v =$$

$$= 1 + tg^2 \frac{1}{2} v \left(1 - \sin^2 \frac{1}{2} v\right) - 3 \sin^2 \frac{1}{2} v =$$

$$= 1 + \sin^2 \frac{1}{2} v - 3 \sin^2 \frac{1}{2} v = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} v = \cos v.$$

Такимъ образомъ

$$dr = \cos v\, dq - \frac{k \sin v}{\sqrt{2q}} dT.$$

Это уравненіе даетъ намъ возможность непосредственно написать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial q} &= \cos v \\ \frac{\partial r}{\partial T} &= -\frac{k \sin v}{\sqrt{2q}}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (276)$$

Формулы (262), (273) и имъ подобныя съ замѣною x на y и z, формулы (275) и (276) служатъ для вычисленія производныхъ отъ прямолинейныхъ координатъ по элементамъ q и T. Присоединяя сюда еще формулы (260), мы будемъ имѣть возможность вычислить дифференціальные коэффиціенты

$$\cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial q}\,,\ \cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial T}\ \text{ и }\ \frac{\partial\delta}{\partial q}\,,\ \frac{\partial\delta}{\partial T}$$

Имѣя формулы, служащія для вычисленія дифференціальныхъ коэффиціентовъ, входящихъ въ условныя уравненія, мы можемъ считать задачу объ опредѣленіи вѣроятнѣйшихъ элементовъ изъ многихъ наблюденій рѣшенной, такъ какъ тогда остается лишь примѣнить способъ наименьшихъ квадратовъ къ рѣшенію условныхъ уравненій.

Читателя, интересующагося удобными для практическихъ примѣненій формулами для вычисленія дифференціальныхъ коэффиціентовъ отсылаемъ къ упоминавшимся выше курсамъ Баушингера, Опольцера и друг. Образцы вычисленій можно найти въ спеціальныхъ работахъ по опредѣленію окончательныхъ элементовъ орбитъ малыхъ планетъ и кометъ.

§ 80. Опредѣленіе элементовъ земной орбиты изъ наблюденій.

Земная орбита, расположенная въ плоскости эклиптики, опредѣляется только четырьмя элементами, а именно: большой полуосью a, эксцентриситетомъ e, долготой перигелія π и временемъ τ прохожденія земли черезъ перигелій, такъ какъ въ этомъ случаѣ наклонность i обращается въ нуль, долгота восходящаго узла ☊ и разстояніе ω перигелія отъ узла дѣлаются произвольными, а сумма ихъ равняется вполнѣ опредѣленной величинѣ, именно долготѣ перигелія π.

Кромѣ того, большая полуось a земной орбиты въ астрономіи принимается за единицу разстояній, и потому собственно изъ наблюденій должны быть опредѣлены всего лишь три элемента e, π и τ.

Въ настоящее время элементы земной орбиты извѣстны съ весьма

удовлетворительною точностью, и современные астрономы могутъ поставить себѣ задачею опредѣленіе лишь небольшихъ поправокъ къ этимъ элементамъ изъ совокупности многихъ наблюденій. Но и приближенные элементы земной орбиты первые астрономы, занимавшіеся этой задачей, напр., Кеплеръ, опредѣляли по многимъ наблюденіямъ, комбинируя эти наблюденія извѣстнымъ образомъ. Изложимъ же способъ опредѣленія приближенныхъ элементовъ земной орбиты изъ совокупности многихъ наблюденій. При этомъ мы будемъ считать извѣстнымъ также періодъ T обращенія земли вокругъ солнца, т. е. продолжительность звѣзднаго года. Продолжительность звѣзднаго года опредѣляется по продолжительности тропическаго года *), которая выводится изъ повторныхъ наблюденій надъ возвращеніемъ солнца къ одной и той-же долготѣ. Продолжительность T звѣзднаго года мы будемъ выражать въ среднихъ суткахъ.

Эксцентриситетъ e можно опредѣлить, измѣряя изо дня въ день угловой діаметръ солнца около эпохъ прохожденій земли черезъ перигелій и черезъ афелій. Когда земля находится въ перигеліи, діаметръ солнца достигаетъ наибольшаго значенія. При прохожденіи земли черезъ афелій діаметръ солнца дѣлается наименьшимъ. Положимъ, что наблюденія дали для наибольшаго значенія солнечнаго діаметра величину D, а для наименьшаго величину d. Въ такомъ случаѣ мы, очевидно, можемъ написать слѣдующее соотношеніе:

$$\frac{D}{d} = \frac{1+e}{1-e},$$

гдѣ $1-e$ есть разстояніе перигелія, а $1+e$ — разстояніе афелія отъ солнца. Изъ предыдущаго соотношенія легко находимъ:

$$e = \frac{D-d}{D+d}.$$

Эксцентриситетъ земной орбиты оказывается равнымъ 0,0168.

Съ другой стороны эксцентриситетъ e земной орбиты можно опредѣлить, измѣряя изо дня въ день суточныя измѣненія долготы солнца около эпохъ прохожденій земли черезъ перигелій и афелій. При прохожденіи земли черезъ перигелій эти измѣненія должны быть наибольшими, а при прохожденіи черезъ афелій наименьшими.

Если геоцентрическую долготу солнца обозначимъ буквой $\lambda_\odot$, то, замѣчая, что геліоцентрическая долгота L земли отличается отъ $\lambda_\odot$ на 180°, и слѣдовательно $\frac{dL}{dt} = \frac{d\lambda_\odot}{dt}$, мы на основаніи закона площадей мо-

---

*) См. А. А. Ивановъ. Курсъ Сферической Астрономіи. СПБ. 1911, стр. 24 и 162.

жемъ написать:

$$r^2 \frac{d\lambda_\odot}{dt} = c,$$

гдѣ r есть радіусъ-векторъ земли, $\frac{d\lambda_\odot}{dt}$ — суточное измѣненіе долготы солнца и c — постоянная величина. Примѣняя общее выраженіе интеграла площадей одинъ разъ къ перигелію, другой разъ къ афелію, будемъ имѣть:

$$(1 - e)^2 \left(\frac{d\lambda_\odot}{dt}\right)_{max} = c \quad \text{и} \quad (1 + e)^2 \left(\frac{d\lambda_\odot}{dt}\right)_{min} = c,$$

гдѣ $\left(\frac{d\lambda_\odot}{dt}\right)_{max}$ и $\left(\frac{d\lambda_\odot}{dt}\right)_{min}$ суть выведенныя изъ наблюденій наибольшее и наименьшее суточныя измѣненія геоцентрической долготы солнца. Принимая для сокращенія письма обозначенія:

$$\left(\frac{d\lambda_\odot}{dt}\right)_{max} = p \quad \text{и} \quad \left(\frac{d\lambda_\odot}{dt}\right)_{min} = \alpha,$$

мы изъ предыдущихъ соотношеній получимъ:

$$\frac{1 + e}{1 - e} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Отсюда

$$e = \frac{\sqrt{p} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{p} + \sqrt{\alpha}}.$$

Замѣтимъ, что приблизительно $p = 61'$ и $\alpha = 57'$.

Покажемъ теперь, какимъ образомъ можетъ быть опредѣлено время прохожденія земли черезъ перигелій. Для этого надо опредѣлять изъ наблюденій изо дня въ день геоцентрическія долготы солнца, по которымъ мы, какъ это уже указано выше, легко вычислимъ соотвѣтственныя геліоцентрическія долготы земли. Имѣя рядъ геліоцентрическихъ долготъ земли около ея прохожденія черезъ афелій и другой рядъ около ея прохожденія черезъ перигелій, мы черезъ интерполированіе можемъ найти *два діаметрально противоположныхъ положенія земли: одно около афелія и другое около перигелія.*

Пусть первое положеніе соотвѣтствуетъ моменту t', а второе моменту t. Положимъ, что земля сначала въ моментъ t' находилась въ нѣкоторомъ положеніи до ея прохожденія черезъ афелій, а затѣмъ въ моментъ t въ нѣкоторомъ другомъ положеніи до ея прохожденія черезъ перигелій, такъ что $t > t'$.

Линія апсидъ, т. е. линія, соединяющая афелій и перигелій, раздѣляетъ орбиту земли на двѣ равныя и одинаково расположенныя части, и потому на прохожденіе отъ афелія до перигелія земля употребляетъ

гелгода. Въ нашемъ случаѣ будетъ $t - t' > \frac{1}{2} T$, такъ какъ около перигелія земля движется быстрѣе, чѣмъ около афелія. Пусть $t + x$ и $t' + x'$ обозначаютъ времена прохожденія земли черезъ перигелій и афелій. Въ такомъ случаѣ мы можемъ написать:

$$t + x - (t' + x') = \frac{1}{2} T.$$

Обозначая уголъ, образуемый линіей апсидъ съ линіей, соединяющей два вышеупомянутыхъ діаметрально противоположныхъ положенія земли буквой u, мы будемъ имѣть для x и x' съ достаточною точностью слѣдующія выраженія:

$$x = \frac{u}{p} \text{ и } x' = \frac{u}{\alpha}.$$

Отсюда легко получаемъ:

$$x' - x = u\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}\right) = \frac{u}{p}\left(\frac{p - \alpha}{\alpha}\right) = x\left(\frac{p - \alpha}{\alpha}\right).$$

Съ другой стороны изъ предыдущаго имѣемъ:

$$x' - x = t - t' - \frac{1}{2} T.$$

Сравнивая между собою два выраженія для $x' - x$, получаемъ:

$$x\left(\frac{p - \alpha}{\alpha}\right) = t - t' - \frac{1}{2} T.$$

Отсюда выводимъ:

$$x = \left(t - t' - \frac{1}{2} T\right) \frac{\alpha}{p - \alpha}.$$

Слѣдовательно, время прохожденія земли черезъ перигелій получится по формулѣ:

$$\tau = t + x = t + \frac{\alpha}{p - \alpha}\left(t - t' - \frac{1}{2} T\right).$$

Затѣмъ легко опредѣляемъ уголъ u, а именно:

$$u = xp = \left(t - t' - \frac{1}{2} T\right) \frac{p\alpha}{p - \alpha}.$$

Теперь уже безъ труда найдемъ послѣдній элементъ земной орбиты, т. е. долготу перигелія π. Долгота перигелія, очевидно, равняется геліоцентрической долготѣ земли въ моментъ τ. Положимъ, что геліоцентрическая долгота земли въ моментъ t изъ наблюденій получилась равной L. Тогда будемъ имѣть:

$$\pi = L + u.$$

По вышеизложенному способу можно опредѣлить лишь приближенные элементы земной орбиты. Однако въ настоящее время, какъ мы уже сказали выше, элементы земной орбиты извѣстны весьма точно, и имѣются хорошія таблицы, дающія возможность вычислять положенія солнца, напр., таблицы Леверье и таблицы Ньюкомба, а потому изъ наблюденій приходится опредѣлять только небольшія поправки къ этимъ элементамъ Выведемъ же формулы, служащія для опредѣленія этихъ поправокъ.

Въ курсѣ сферической астрономіи *) были выведены формулы:

$$\sin\delta_\odot = \sin\varepsilon \sin\lambda_\odot$$
$$\cos\delta_\odot \sin\alpha_\odot = \cos\varepsilon \sin\lambda_\odot$$
$$\cos\delta_\odot \cos\alpha_\odot = \cos\lambda_\odot,$$

гдѣ $\alpha_\odot$ и $\delta_\odot$ суть прямое восхожденіе и склоненіе солнца, $\lambda_\odot$ — его долгота, ε — наклонность экватора къ эклиптикѣ.

Дифференцируя первую изъ этихъ формулъ, имѣемъ:

$$\cos\delta_\odot \, d\delta_\odot = \sin\varepsilon \cos\lambda_\odot \, d\lambda_\odot + \cos\varepsilon \sin\lambda_\odot \, d\varepsilon.$$

При этомъ дифференцированіи мы наклонность ε экватора къ эклиптикѣ считали величиной перемѣнной, такъ какъ ошибки въ прямомъ восхожденіи и склоненіи солнца могутъ зависѣть не только отъ ошибокъ въ элементахъ земной орбиты, но также отъ неточнаго значенія величины ε.

Замѣняя здѣсь $\cos\lambda_\odot$ и $\sin\lambda_\odot$ равными имъ величинами $\cos\delta_\odot \cos\alpha_\odot$ и $\frac{\sin\delta_\odot}{\sin\varepsilon}$, получаемъ окончательно:

$$d\delta_\odot = \sin\varepsilon \cos\alpha_\odot \, d\lambda_\odot + \frac{tg\,\delta_\odot}{tg\,\varepsilon} \, d\varepsilon.$$

Далѣе, раздѣляя формулу для $\cos\delta_\odot \sin\alpha_\odot$ на формулу для $\cos\delta_\odot \cos\alpha_\odot$, находимъ:

$$tg\,\alpha_\odot = \cos\varepsilon \, tg\,\lambda_\odot.$$

Дифференцируемъ эту формулу:

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha_\odot} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\lambda_\odot} \, d\lambda_\odot - \sin\varepsilon \, tg\,\lambda_\odot \, d\varepsilon.$$

Замѣняя здѣсь $\cos^2\lambda_\odot$ и $\sin\varepsilon \, tg\,\lambda_\odot$ равными имъ величинами $\cos^2\delta_\odot \cos^2\alpha_\odot$ и $\frac{tg\,\delta_\odot}{\cos\alpha_\odot}$, окончательно получимъ:

$$d\alpha_\odot = \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\delta_\odot} \, d\lambda_\odot - \cos\alpha_\odot \, tg\,\delta_\odot \, d\varepsilon.$$

*) А. А. Ивановъ. Курсъ Сферической Астрономіи. СПБ. 1911, стр. 61.

Замѣняя дифференціалы конечными поправками, будемъ имѣть:

$$\Delta\alpha_{\odot} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2\delta_{\odot}}\,\Delta\lambda_{\odot} - \cos\alpha_{\odot}\,tg\,\delta_{\odot}\,\Delta\varepsilon$$

$$\Delta\delta_{\odot} = \sin\varepsilon\cos\alpha_{\odot}\,\Delta\lambda_{\odot} + \frac{tg\,\delta_{\odot}}{tg\,\varepsilon}\,\Delta\varepsilon.$$

Здѣсь подъ $\Delta\alpha_{\odot}$ и $\Delta\delta_{\odot}$ мы должны разумѣть разности

$$\Delta\alpha_{\odot} = \alpha_0 - \alpha_c \quad \text{и} \quad \Delta\delta_{\odot} = \delta_0 - \delta_c,$$

причемъ α_0 и δ_0 суть наблюденныя координаты солнца, а α_c и δ_c—взятыя изъ таблицъ или изъ астрономическаго календаря.

Теперь поправку $\Delta\lambda_{\odot}$ надо представить въ зависимости отъ поправокъ элементовъ земной орбиты. Имѣемъ:

$$\lambda_{\odot} = L + 180^\circ = L_0 + v - M,$$

гдѣ L_0 есть средняя долгота земли, v—истинная аномалія, M—средняя аномалія, а $(v - M)$ — такъ называемое уравненіе центра. Отсюда получаемъ слѣдующую зависимость между поправками:

$$\Delta\lambda_{\odot} = \Delta L_0 + \Delta v - \Delta M.$$

Но такъ какъ

$$L_0 = L_0^{(0)} + n\,(t - t^{(0)}),$$

гдѣ $L_0^{(0)}$ есть средняя долгота земли для начальной эпохи $t^{(0)}$, а n — среднее суточное движеніе земли, то

$$\Delta L_0 = \Delta L_0^{(0)} + t\Delta n.$$

Замѣтимъ, что элементъ L_0 замѣняетъ собою элементъ τ, а элементъ n введенъ вмѣсто большой полуоси a или, что то-же, вмѣсто періода обращенія T земли вокругъ солнца.

Далѣе уравненіе центра представляется формулой:

$$v - M = \frac{2e\sin M}{\sin 1''} + \frac{5}{4}\,\frac{e^2\sin 2M}{\sin 1''} + \ldots$$

Поэтому, удерживая въ коэффиціентахъ лишь первую степень эксцентриситета e, будемъ имѣть:

$$\Delta v - \Delta M = 2e\cos M\,\Delta M + (2 + 5e\cos M)\,\frac{\sin M}{\sin 1''}\,\Delta e.$$

Но, имѣя въ виду, что

$$M = L_0 - \pi = L_0^{(0)} + n\,(t - t^{(0)}) - \pi,$$

получаемъ:

$$\Delta M = \Delta L_0^{(0)} + t\Delta n - \Delta\pi.$$

Слѣдовательно

$$\Delta v - \Delta M = 2e \cos M (\Delta L_0^{(0)} + t\Delta n - \Delta\pi) + (2 + 5e \cos M) \frac{\sin M}{\sin 1''} \Delta e.$$

Окончательно получаемъ:

$$\Delta\lambda_{\odot} = (1 + 2e \cos M) \Delta L_0^{(0)} + (1 + 2e \cos M) t\Delta n - 2e \cos M \Delta\pi +$$

$$+ (2 + 5e \cos M) \frac{\sin M}{\sin 1''} \Delta e.$$

Подставляя эту величину $\Delta\lambda_{\odot}$ въ выраженія для $\Delta\alpha_{\odot}$ и $\Delta\delta_{\odot}$, мы будемъ имѣть столько уравненій съ пятью неизвѣстными $\Delta L_0^{(0)}$, Δn, $\Delta\pi$, Δe и $\Delta\varepsilon$, сколько было наблюдено прямыхъ восхожденій и склоненій солнца. Рѣшая эти уравненія по способу наименьшихъ квадратовъ, мы найдемъ вѣроятнѣйшія значенія поправокъ $\Delta L_0^{(0)}$, Δn, $\Delta\pi$, Δe и $\Delta\varepsilon$.

§ 81. Опредѣленіе элементовъ орбитъ большихъ планетъ.

Элементы орбитъ большихъ планетъ, какъ и элементы земной орбиты, въ настоящее время извѣстны съ весьма удовлетворительною точностью, а положенія этихъ небесныхъ тѣлъ вычисляются при помощи таблицъ Леверье или Ньюкомба. Такимъ образомъ въ настоящее время приходится лишь изъ совокупности многихъ наблюденіи опредѣлять небольшія поправки къ уже извѣстнымъ элементамъ. Но первые астрономы и приближенные элементы орбитъ большихъ планетъ опредѣляли изъ совокупности многихъ наблюденій, комбинируя эти наблюденія извѣстнымъ образомъ. Въ настоящемъ параграфѣ мы изложимъ тѣ пріемы, которые могутъ быть употреблены для этой цѣли.

Для этого надо наблюдать большую планету, орбиту которой желательно опредѣлить, возможно чаще въ теченіе двухъ и даже болѣе ея оборотовъ вокругъ солнца. Такія наблюденія дадутъ цѣлый рядъ геоцентрическихъ долготъ и широтъ планеты. При помощи интерполированія мы можемъ получить геоцентрическія долготы и широты также для такихъ моментовъ, въ которые наблюденія надъ планетой не производились.

Первой нашей задачей является опредѣленіе геліоцентрическихъ координатъ планеты. Для этого мы должны изъ ряда геоцентрическихъ долготъ и широтъ планеты при помощи интерполированія получить эти координаты для двухъ моментовъ, отдѣленныхъ другъ отъ друга промежуткомъ, равнымъ P или $2P$, гдѣ P есть продолжительность звѣзднаго оборота планеты вокругъ солнца, причемъ P можетъ быть выведено изъ наблюденій, если раньше уже было изслѣдовано движеніе земли вокругъ солнца. Для этого надо знать продолжительность синодическаго оборота планеты,

которая опредѣляется изъ повторныхъ наблюденій надъ возвращеніемъ планеты къ соединеніямъ или противостояніямъ съ солнцемъ. Планета въ упомянутые выше моменты будетъ находиться въ одной и той же точкѣ своей орбиты, такъ что ея геліоцентрическія долготы и широты въ эти моменты должны быть одинаковыми. Земля же въ эти моменты будетъ занимать два различныхъ положенія, а потому геоцентрическія координаты солнца и планеты будутъ различны.

Называя геліоцентрическія координаты планеты буквами r, l и b, геоцентрическія ея координаты для перваго момента буквами ρ_1, λ_1 и β_1 и для второго буквами ρ_2, λ_2 и β_2 и геоцентрическія координаты солнца для этихъ двухъ моментовъ буквами R_1, L_1 и R_2, L_2, причемъ широтами солнца мы пренебрегаемъ, мы будемъ имѣть такія соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} r\cos l\cos b &= \rho_1\cos\lambda_1\cos\beta_1 - R_1\cos L_1 \\ r\sin l\cos b &= \rho_1\sin\lambda_1\cos\beta_1 - R_1\sin L_1 \\ r\sin b &= \rho_1\sin\beta_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (277)$$

и

$$\left.\begin{aligned} r\cos l\cos b &= \rho_2\cos\lambda_2\cos\beta_2 - R_2\cos L_2 \\ r\sin l\cos b &= \rho_2\sin\lambda_2\cos\beta_2 - R_2\sin L_2 \\ r\sin b &= \rho_2\sin\beta_2. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (278)$$

Отсюда для опредѣленія геоцентрическихъ разстояній ρ_1 и ρ_2 получаемъ такія два уравненія:

$$\rho_1\cos\lambda_1\cos\beta_1 - R_1\cos L_1 = \rho_2\cos\lambda_2\cos\beta_2 - R_2\cos L_2$$
$$\rho_1\sin\lambda_1\cos\beta_1 - R_1\sin L_1 = \rho_2\sin\lambda_2\cos\beta_2 - R_2\sin L_2.$$

Найдя ρ_1 и ρ_2, геліоцентрическія координаты r, l и b вычисляемъ или по формуламъ (277), или по формуламъ (278).

На основаніи изложеннаго мы можемъ въ дальнѣйшемъ считать геліоцентрическія координаты планеты извѣстными для любого момента.

Для опредѣленія элементовъ ☊ и i мы должны воспользоватся слѣдующими двумя формулами, которыя были выведены выше:

$$tg\, i\sin(l_1 - ☊) = tg\, b_1$$
$$tg\, i\cos(l_1 - ☊) = \frac{tg\, b_2 - tg\, b_1\cos(l_2 - l_1)}{\sin(l_2 - l_1)},$$

причемъ координаты l_1, b_1 и l_2, b_2 опредѣляются по изложенному нами способу, и одна изъ широтъ должна быть близка къ нулю, а другая по абсолютной величинѣ достигать возможно большаго значенія. Опредѣливши элементы ☊ и i, мы можемъ для любой геліоцентрической дол-

готы l планеты найти соотвѣтствующую ея долготу L въ орбитѣ. Для этого служитъ формула:

$$tg\,(L - \Omega) = \frac{tg\,(l - \Omega)}{\cos i}.$$

Обращаемся теперь къ опредѣленію эксцентриситета e, долготы перигелія π и большой полуоси a орбиты.

Возьмемъ уравненіе эллиптической орбиты въ полярныхъ координатахъ:

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos v}.$$

Замѣняя v равной ему величиной $L - \pi$, получаемъ:

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos\,(L - \pi)}.$$

Это уравненіе можемъ переписать въ видѣ:

$$r + re\cos\,(L - \pi) = a\,(1 - e^2).$$

Примѣняя его къ тремъ какимъ-нибудь моментамъ t', t'' и t''', будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} a(1 - e^2) &= r' + r'e\cos\,(L' - \pi) \\ a(1 - e^2) &= r'' + r''e\cos\,(L'' - \pi) \\ a(1 - e^2) &= r''' + r'''e\cos\,(L''' - \pi). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (279)$$

Отсюда находимъ:

$$r' + r'e\cos\,(L' - \pi) = r'' + r''e\cos\,(L'' - \pi)$$
$$r' + r'e\cos\,(L' - \pi) = r''' + r'''e\cos\,(L''' - \pi).$$

Эти уравненія можемъ переписать такъ:

$$(r'\cos L' - r''\cos L'')\,x + (r'\sin L' - r''\sin L'')\,y = r'' - r'$$
$$(r'\cos L' - r'''\cos L''')\,x + (r'\sin L' - r'''\sin L''')\,y = r''' - r',$$

гдѣ приняты такія обозначенія:

$$x = e\cos\pi \qquad \text{и} \qquad y = e\sin\pi.$$

Обозначая для краткости

$$m = r'\cos L' - r''\cos L'', \qquad p = r'\cos L' - r'''\cos L''',$$
$$n = r'\sin L' - r''\sin L'', \qquad q = r'\sin L' - r'''\sin L''',$$

будемъ имѣть:

$$x = \frac{(r'' - r')\,q - (r''' - r')\,n}{mq - np}$$

$$y = \frac{(r''' - r')\,m - (r'' - r')\,p}{mq - np}.$$

Затѣмъ получаемъ:

$$tg\,\pi = \frac{y}{x} \text{ и } e = \sqrt{x^2 + y^2},$$

причемъ четверть, въ которой лежитъ π, опредѣляется знаками y и x.

Наконецъ по любому изъ уравненій (279) опредѣляется a.

Теперь остается опредѣлить послѣдній элементъ, именно время прохожденія планеты черезъ перигелій.

Съ этой цѣлію обратимся къ общимъ формуламъ

$$\begin{aligned} cos\,(L - \Omega) &= cos\,(l - \Omega)\,cos\,b \\ sin\,(L - \Omega)\,cos\,i &= sin\,(l - \Omega)\,cos\,b \\ sin\,(L - \Omega)\,sin\,i &= sin\,b, \end{aligned}$$

которыя были выведены въ § 24, и примѣнимъ ихъ къ перигелію, для котораго $L = \pi$, $l = l_T$ и $b = b_T$. Тогда получимъ:

$$\begin{aligned} cos\,(l_T - \Omega)\,cos\,b_T &= cos\,(\pi - \Omega) \\ sin\,(l_T - \Omega)\,cos\,b_T &= sin\,(\pi - \Omega)\,cos\,i \\ sin\,b_T &= sin\,(\pi - \Omega)\,sin\,i. \end{aligned}$$

Отсюда опредѣляемъ геліоцентрическія координаты l_T и b_T для момента прохожденія планеты черезъ перигелій.

По изложенному въ началѣ этого параграфа методу мы выведемъ изъ наблюденій цѣлый рядъ геліоцентрическихъ долготъ и широтъ для различныхъ моментовъ. Пользуясь этими данными, мы по формуламъ интерполированія можемъ опредѣлить моментъ T, которому принадлежатъ координаты l_T и b_T. Это есть задача, обратная интерполированію. Найденный моментъ T и есть моментъ прохожденія планеты черезъ перигелій.

УПРАЖНЕНІЯ.

Задача № 22. Дана эфемерида кометы:

1881, 12^h ср. Берл. вр.	α	δ	$log\,\rho$	аберр. вр.
Іюня 23	$5^h34^m51^s,84$	$+45°\ 3'\ 3'',7$	9,4802	$2^m30^s,6$
24	5 38 36 ,60	+49 20 59 ,2	9,4949	2 35 ,8
25	5 42 48 ,25	+53 18 32 ,0	9,5115	2 41 ,9
26	5 47 29 ,98	+56 55 10 ,5	9,5296	2 48 ,8
27	5 52 45 ,26	+60 11 15 ,6	9,5486	2 56 ,3
28	5 58 37 ,92	+63 7 43 ,2	9,5682	3 4 ,5
29	6 5 12 ,12	+65 45 48 ,9	9,5880	3 13 ,1
30	6 12 32 ,26	+68 6 59 ,2	9,6079	3 22 ,1
Іюля 1	6 20 42 ,99	+70 12 41 ,2	9,6275	3 31 ,4

Далѣе даны наблюденія:

				ср. мѣстн. вр.	α	δ
1) Пулково . .	1881 г.	Іюня	28	$11^h29^m45^s,8$	$5^h58^m11^s,94$	$+62°55'35'',8$
2) Пулково . .	»	»	28	11 29 45 ,8	5 58 11 ,95	+ 62 55 36 ,3
3) Мадридъ .	»	»	28	11 29 59 ,0	5 58 47 ,70	+ 63 11 24 ,0
4) Страссбургъ	»	»	29	14 34 8 ,0	5 59 24 ,79	+ 63 27 24 ,0.

Эти положенія кометы уже освобождены отъ вліянія прецессіи и нутаціи.

На основаніи этихъ четырехъ наблюденій требуется составить нормальное мѣсто.

Рѣшеніе. Прежде всего надо взять изъ Berliner Astronomisches Jahrbuch'а долготы Пулкова, Мадрида и Страссбурга относительно Берлина, для того, чтобы всѣ моменты наблюденій выразить въ Берлинскомъ среднемъ времени. Эти долготы соотвѣтственно равны $1^h7^m43^s,74$ къ вост., $1^h8^m19^s,96$ къ зап., $0^h22^m30^s,25$ къ зап. Получаемъ:

	ср. Берл. вр.
1)	$10^h22^m\ 2^s,1$
2)	10 22 2 ,1
3)	12 38 19 ,0
4)	14 56 38 ,2.

Послѣ этого для всѣхъ четырехъ наблюденій находимъ изъ эфемериды при помощи интерполированія $log\ \rho$ и аберраціонное время:

	$log\ \rho$	аб. вр.
1)	9,5670	$-3^m4^s,0$
2)	9,5670	— 3 4 ,0
3)	9,5687	— 3 4 ,7
4)	9,5706	— 3 5 ,5.

Затѣмъ вычисляемъ для всѣхъ наблюденій вліяніе параллакса:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1)	$0^s,00$	$+20'',2$
2)	0 ,00	+ 20 ,2
3)	0 ,00	+ 23 ,2
4)	— 1 ,69	+ 17 ,7.

Приводя наблюденныя α и δ къ центру земли, имѣемъ:

1)	$5^h58^m11^s,94$	$+62°55'56'',0$
2)	5 58 11 ,95	+ 62 55 56 ,5
3)	5 58 47 ,70	+ 63 11 47 ,2
4)	5 59 23 ,10	+ 63 27 41 ,7.

Вычисленныя же координаты, т. е. полученныя изъ эфемериды посредствомъ интерполированія для моментовъ наблюденій, уменьшенныхъ на аберраціонныя времена, даны въ слѣдующей табличкѣ:

1)	$5^h58^m11^s,87$	$+62°55'57'',3$
2)	5 58 11 ,87	+ 62 55 57 ,3
3)	5 58 47 ,05	+ 63 11 48 ,1
4)	5 59 23 ,14	+ 63 27 43 ,1.

Теперь составляемъ разности между наблюденными и вычисленными положеніями:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1)	$+0^s,07$	$-1'',3$
2)	+ 0 ,08	— 0 ,8
3)	+ 0 ,65	— 0 ,9
4)	— 0 ,04	— 1 ,4
Въ среднемъ . . .	$+0^s,19$	$-1'',1.$

Эти поправки для составленія нормальнаго мѣста можно прибавить къ α и δ, даннымъ въ эфемеридѣ для Іюня 28,5 по ср. Берл. времени. Такимъ образомъ нормальное мѣсто будетъ:

$$1881,\ \text{Іюня}\ 28{,}5\quad \alpha = 5^h58^m38^s,11 \qquad \delta = +63°7'42'',1.$$

ГЛАВА XII.

Нѣкоторыя понятія изъ небесной механики.

§ 82. Дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія.

Невозмущенное движеніе, разсматриваемое въ курсѣ теоретической астрономіи, есть лишь первое приближеніе въ задачѣ объ истинномъ движеніи небесныхъ тѣлъ. Для точнаго рѣшенія задачи о движеніи, напр., планетъ нашей солнечной системы необходимо разсматривать сразу всѣ эти планеты. Однако вслѣдствіе малости массъ планетъ дѣйствіе другихъ планетъ не очень значительно видоизмѣняетъ невозмущенное движеніе какой-нибудь одной интересующей насъ планеты. Поэтому и задачу о возмущенномъ движеніи можно рѣшать не сразу въ полномъ объемѣ, а сначала можно разсматривать кромѣ солнца лишь двѣ планеты. Такимъ образомъ мы получаемъ задачу о трехъ тѣлахъ.

Если массу солнца обозначимъ буквой m, массы планетъ буквами m' и m'', координаты этихъ тѣлъ соотвѣтственно буквами ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'', то дифференціальныя уравненія абсолютнаго движенія нашихъ тѣлъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -\frac{k^2m'(\xi-\xi')}{r'^3} - \frac{k^2m''(\xi-\xi'')}{r''^3}\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\frac{k^2m'(\eta-\eta')}{r'^3} - \frac{k^2m''(\eta-\eta'')}{r''^3}\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -\frac{k^2m'(\zeta-\zeta')}{r'^3} - \frac{k^2m''(\zeta-\zeta'')}{r''^3}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(28\ )$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi'}{dt^2} &= -\frac{k^2m(\xi'-\xi)}{r'^3} - \frac{k^2m''(\xi'-\xi'')}{\Delta^3}\\
\frac{d^2\eta'}{dt^2} &= -\frac{k^2m(\eta'-\eta)}{r'^3} - \frac{k^2m''(\eta'-\eta'')}{\Delta^3}\\
\frac{d^2\zeta'}{dt^2} &= -\frac{k^2m(\zeta'-\zeta)}{r'^3} - \frac{k^2m''(\zeta'-\zeta'')}{\Delta^3}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(281)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi''}{dt^2} &= -\frac{k^2m\,(\xi''-\xi)}{r''^3} - \frac{k^2m'\,(\xi''-\xi')}{\Delta^3}\\ \frac{d^2\eta''}{dt^2} &= -\frac{k^2m\,(\eta''-\eta)}{r''^3} - \frac{k^2m'\,(\eta''-\eta')}{\Delta^3}\\ \frac{d^2\zeta''}{dt^2} &= -\frac{k^2m\,(\zeta''-\zeta)}{r''^3} - \frac{k^2m'\,(\zeta''-\zeta')}{\Delta^3}\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(282)$$

Здѣсь

$$r' = \sqrt{(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2}$$

и

$$r'' = \sqrt{(\xi''-\xi)^2+(\eta''-\eta)^2+(\zeta''-\zeta)^2}$$

суть разстоянія планетъ m' и m'' отъ солнца m,

$$\Delta = \sqrt{(\xi''-\xi')^2+(\eta''-\eta')^2+(\zeta''-\zeta')^2}$$

есть взаимное разстояніе планетъ m' и m''.

Будемъ, какъ и въ случаѣ невозмущеннаго движенія, разсматривать относительное движеніе планетъ m' и m'' по отношенію къ солнцу m. Для этого примемъ за начало координатъ центръ солнца m. Координаты планетъ m' и m'' по отношенію къ такимъ осямъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \xi'-\xi \qquad & x'' &= \xi''-\xi\\ y' &= \eta'-\eta \qquad & y'' &= \eta''-\eta\\ z' &= \zeta'-\zeta \qquad & z'' &= \zeta''-\zeta.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(283)$$

Вычтемъ изъ уравненій (281) и (282) соотвѣтственныя уравненія системы (280).

Тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2(\xi'-\xi)}{dt^2} &= -\frac{k^2(m+m')(\xi'-\xi)}{r'^3} - \frac{k^2m''(\xi'-\xi'')}{\Delta^3} - \frac{k^2m''(\xi''-\xi)}{r''^3}\\ \frac{d^2(\eta'-\eta)}{dt^2} &= -\frac{k^2(m+m')(\eta'-\eta)}{r'^3} - \frac{k^2m''(\eta'-\eta'')}{\Delta^3} - \frac{k^2m''(\eta''-\eta)}{r''^3}\\ \frac{d^2(\zeta'-\zeta)}{dt^2} &= -\frac{k^2(m+m')(\zeta'-\zeta)}{r'^3} - \frac{k^2m''(\zeta'-\zeta'')}{\Delta^3} - \frac{k^2m''(\zeta''-\zeta)}{r''^3}\end{aligned}\right\}(284)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2(\xi''-\xi)}{dt^2} &= -\frac{k^2(m+m'')(\xi''-\xi)}{r''^3} - \frac{k^2m'(\xi''-\xi')}{\Delta^3} - \frac{k^2m'(\xi'-\xi)}{r'^3}\\ \frac{d^2(\eta''-\eta)}{dt^2} &= -\frac{k^2(m+m'')(\eta''-\eta)}{r''^3} - \frac{k^2m'(\eta''-\eta')}{\Delta^3} - \frac{k^2m'(\eta'-\eta)}{r'^3}\\ \frac{d^2(\zeta''-\zeta)}{dt^2} &= -\frac{k^2(m+m'')(\zeta''-\zeta)}{r''^3} - \frac{k^2m'(\zeta''-\zeta')}{\Delta^3} - \frac{k^2m'(\zeta'-\zeta)}{r'^3}.\end{aligned}\right\}(285)$$

Пользуясь соотношеніями (283), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{k^2(m+m')\,x'}{r'^3} &= -\frac{k^2m''(x'-x'')}{\Delta^3}-\frac{k^2m''\,x''}{r''^3}\\
\frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{k^2(m+m')\,y'}{r'^3} &= -\frac{k^2m''(y'-y'')}{\Delta^3}-\frac{k^2m''\,y''}{r''^3}\\
\frac{d^2z'}{dt^2}+\frac{k^2(m+m')\,z'}{r'^3} &= -\frac{k^2m''(z'-z'')}{\Delta^3}-\frac{k^2m''\,z''}{r''^3}
\end{aligned}\right\}\quad(286)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x''}{dt^2}+\frac{k^2(m+m'')\,x''}{r''^3} &= -\frac{k^2m'(x''-x')}{\Delta^3}-\frac{k^2m'\,x'}{r'^3}\\
\frac{d^2y''}{dt^2}+\frac{k^2(m+m'')\,y''}{r''^3} &= -\frac{k^2m'(y''-y')}{\Delta^3}-\frac{k^2m'\,y'}{r'^3}\\
\frac{d^2z''}{dt^2}+\frac{k^2(m+m'')\,z''}{r''^3} &= -\frac{k^2m'(z''-z')}{\Delta^3}-\frac{k^2m'\,z'}{r'^3}.
\end{aligned}\right\}\quad(287)$$

Это и суть уравненія возмущеннаго движенія. Такимъ образомъ для рѣшенія задачи о возмущенномъ движеніи надо проинтегрировать шесть *совокупныхъ* дифференціальныхъ уравненій второго порядка (286) и (287). Интегрированіемъ этихъ уравненій и занимается небесная механика. Замѣтимъ, что въ этихъ уравненіяхъ

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$$r''=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2},$$

$$\Delta=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}.$$

Уравненія (286) и (287) можно представить въ нѣсколько болѣе простомъ видѣ, если ввести въ разсмотрѣніе функціи:

$$R'=k^2m'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{r'^3}\right)$$

$$R''=k^2m''\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{r''^3}\right).$$

Тогда уравненія (286) и (287) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{k^2(m+m')\,x'}{r'^3} &= \frac{\partial R''}{\partial x'}\\
\frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{k^2(m+m')\,y'}{r'^3} &= \frac{\partial R''}{\partial y'}\\
\frac{d^2z'}{dt^2}+\frac{k^2(m+m')\,z'}{r'^3} &= \frac{\partial R''}{\partial z'}
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots(288)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x''}{dt^2}+\frac{k^2(m+m'')\,x''}{r''^3}&=\frac{\partial R'}{\partial x''}\\ \frac{d^2y''}{dt^2}+\frac{k^2(m+m'')\,y''}{r''^3}&=\frac{\partial R'}{\partial y''}\\ \frac{d^2z''}{dt^2}+\frac{k^2(m+m'')\,z''}{r''^3}&=\frac{\partial R'}{\partial z''}\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(289)$$

Если въ уравненіяхъ (288) положить $m''=0$, а въ уравненіяхъ (289) принять $m'=0$, то получимъ уравненія невозмущеннаго движенія планетъ m' и m''. Эти уравненія будутъ уже независимы другъ отъ друга.

Функціи R' и R'' называются *пертурбаціонными функціями*. Функція R' опредѣляетъ возмущающее дѣйствіе планеты m' на движеніе планеты m''. Функція R'' опредѣляетъ возмущающее дѣйствіе планеты m'' на движеніе планеты m'. Въ функціи R' членъ $\frac{k^2m'}{\Delta}$ обусловливается взаимнымъ притяженіемъ планетъ m' и m'', а членъ $k^2m'\cdot\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{r'^3}$ взаимнымъ притяженіемъ солнца и планеты m'. Въ функціи R'' членъ $\frac{k^2m''}{\Delta}$ обусловливается опять взаимнымъ притяженіемъ планетъ m'' и m', а членъ $k^2m''\cdot\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{r''^3}$ взаимнымъ притяженіемъ солнца и планеты m''.

§ 83. Оскулирующая орбита и типы планетныхъ неравенствъ.

Точное интегрированіе уравненій (288) и (289) при современномъ состояніи анализа невозможно. Но въ случаѣ нашей солнечной системы задача о возмущенномъ движеніи можетъ быть рѣшена приближенно, благодаря тому, что орбиты планетъ обладаютъ небольшими эксцентриситетами и ихъ плоскости наклонены къ плоскости эклиптики подъ небольшими углами. Это даетъ возможность разложить пертурбаціонную функцію въ рядъ по степенямъ эксцентриситетовъ и тангенсовъ наклонностей. Приближенное рѣшеніе задачи практически вполнѣ удовлетворяетъ современнымъ наблюденіямъ.

Методы приближеннаго рѣшенія задачи могутъ быть различны, но всегда исходнымъ пунктомъ является невозмущенное движеніе небеснаго тѣла по эллипсу.

Съ одной стороны можно сначала опредѣлить невозмущенныя значенія прямоугольныхъ координатъ планеты и затѣмъ искать возмущенія этихъ координатъ. Съ другой стороны положеніе планеты въ невозмущенномъ движеніи можно опредѣлить полярными координатами, т. е. ея

радіусомъ-векторомъ и геліоцентрическими широтой и долготой, а затѣмъ вычислять возмущенія въ радіусѣ-векторѣ, широтѣ и долготѣ.

Наконецъ, весьма сложную истинную орбиту, которая является кривой двоякой кривизны, можно разбить на безконечно большое число безконечно малыхъ элементовъ. Каждый такой безконечно малый элементъ мы можемъ принимать за дугу эллипса, соприкасающагося въ данный моментъ съ истинной орбитой. Въ такомъ случаѣ истинное движеніе можно разсматривать какъ движеніе по эллиптической орбитѣ съ постоянно мѣняющимися элементами. Если представить себѣ, что въ нѣкоторый моментъ t_0 прекратилось дѣйствіе всѣхъ возмущающихъ планетъ, то дальнѣйшее движеніе небеснаго тѣла будетъ происходить по эллиптической орбитѣ съ постоянными элементами, опредѣляющими тотъ эллипсъ, который соприкасался съ истинной орбитой въ моментъ t_0. Эта эллиптическая орбита называется *оскулирующей орбитой* для момента t_0, а ея элементы *оскулирующими элементами* для того же момента. Разсматривая истинное движеніе какъ движеніе по эллиптической орбитѣ съ постоянно мѣняющимися элементами, мы имѣемъ дѣло съ вычисленіемъ возмущеній нѣкоторыхъ оскулирующихъ элементовъ за опредѣленный промежутокъ времени. При этомъ возмущенія элементовъ получаются въ различной аналитической формѣ. Называя какой-нибудь элементъ буквой θ, а его возмущенія знакомъ $\delta\theta$, мы будемъ имѣть возмущенія двухъ родовъ:

$$\delta\theta = p \,{}^{\cos}_{\sin} \{\alpha t + \beta\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (290)$$

или

$$\delta\theta = gt + g't^2, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (291)$$

гдѣ p, α, β, g и g' суть постоянныя величины.

Возмущенія вида (290) называются возмущеніями *періодическими*, причемъ періодъ этихъ возмущеній равенъ

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Если α есть конечная величина, то періодическія возмущенія называются возмущеніями *короткаго періода*. Эти возмущенія компенсируются или уничтожаются въ теченіе короткихъ періодовъ времени, иногда въ теченіе всего нѣсколькихъ дней. Примѣромъ возмущеній короткаго періода могутъ служить широты солнца, которыя при невозмущенномъ движеніи должны были бы всегда равняться нулю. Для большей наглядности приведемъ широты солнца, напр., для Марта мѣсяца 1893 года:

1893 Марта	1	+0″.45	1893 Марта	11	—0″.54	1893 Марта	21	+0″.04
	2	+0 .38		12	—0 .60		22	+0 .17
	3	+0 .30		13	—0 .63		23	+0 .29
	4	+0 .20		14	—0 .64		24	+0 .38
	5	+0 .09		15	—0 .62		25	+0 .45
	6	—0 .03		16	—0 .56		26	+0 .49
	7	—0 .15		17	—0 .48		27	+0 .49
	8	—0 .27		18	—0 .37		28	+0 .46
	9	—0 .38		19	—0 .24		29	+0 .40
	10	—0 .47		20	—0 .10		30	+0 .32
	11	—0 .54		21	+0. 04		31	+0 .22

Но можетъ оказаться, что коэффиціентъ α очень малъ, напр., равняется нѣсколькимъ секундамъ дуги, если за единицу времени принять сутки. Въ такомъ случаѣ періодъ

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}$$

достигаетъ нѣсколькихъ сотъ лѣтъ, и тогда періодическія возмущенія получаютъ названіе возмущеній *длиннаго періода*. Такъ, взаимныя притяженія Юпитера и Сатурна порождаютъ въ движеніи этихъ планетъ періодическія возмущенія съ періодомъ въ 850 лѣтъ.

Возмущенія вида (291) называются *вѣковыми* возмущеніями. При приближенномъ интегрированіи уравненій возмущеннаго движенія вѣковыя возмущенія появляются во всѣхъ элементахъ, за исключеніемъ большихъ полуосей планетъ. По третьему закону Кеплера заключаемъ, что и времена оборотовъ планетъ вокругъ солнца также не подвержены вѣковымъ возмущеніямъ. То обстоятельство, что большія полуоси планетныхъ орбитъ не имѣютъ вѣковыхъ возмущеній, является чрезвычайно важнымъ для прочности устройства солнечной системы. Вѣковыя же возмущенія эксцентриситетовъ и наклонностей говорятъ противъ такой прочности. Однако вѣковыя возмущенія въ этихъ элементахъ представляютъ лишь результаты приближеннаго рѣшенія задачи. Въ дѣйствительности же болѣе точное рѣшеніе задачи показываетъ намъ, что мы здѣсь имѣемъ дѣло съ возмущеніями чрезвычайно длиннаго періода, достигающаго нѣсколькихъ десятковъ тысячъ лѣтъ, и лишь разложенія въ ряды косинусовъ и синусовъ очень малыхъ дугъ даютъ намъ члены, пропорціональные времени и квадрату времени.

Такъ, взаимныя притяженія Юпитера и Сатурна порождаютъ въ эксцентриситетахъ этихъ планетъ періодическія возмущенія съ періодомъ въ

70414 лѣтъ. Въ небесной механикѣ для квадратовъ эксцентриситетовъ выводятся выраженія вида:

$$e^2 = A + B\cos(ht + \gamma),$$

гдѣ A, B, h и γ суть постоянныя величины, причемъ h есть очень малая величина, составляющая всего нѣсколько секундъ дуги, если за единицу времени принять годъ. Въ такомъ случаѣ періодъ

$$T = \frac{2\pi}{h}$$

и можетъ равняться нѣсколькимъ десяткамъ тысячъ лѣтъ.

Формулу для e^2 мы можемъ представить такъ:

$$e^2 = A + B\cos\gamma\,\cos ht - B\sin\gamma\,\sin ht$$

Пока промежутокъ времени t не сдѣлается очень большимъ, до тѣхъ поръ ht останется достаточно малой величиной, и $\sin ht$ и $\cos ht$ можно разложить въ ряды:

$$\sin ht = ht \sin 1'' \ldots$$

$$\cos ht = 1 - \frac{1}{2} h^2 t^2 \sin^2 1'' \ldots$$

Поэтому

$$e^2 = e_0^{\,2} + gt + g't^2,$$

гдѣ

$$e_0^{\,2} = A + B\cos\gamma, \quad g = -Bh\sin\gamma\sin 1'', \quad g' = -\frac{1}{2} Bh^2 \cos\gamma \sin^2 1''.$$

Здѣсь $e_0^{\,2}$ есть квадратъ оскулирующаго эксцентриситета для начальнаго момента, а выраженіе $gt + g't^2$ представляетъ такъ называемое вѣковое возмущеніе въ квадратѣ эксцентриситета.

Такимъ образомъ, эксцентриситеты и наклонности въ дѣйствительности вѣковыхъ возмущеній не имѣютъ. Въ элементахъ же π и ☊ могутъ существовать вѣковыя возмущенія, но это нисколько не противорѣчитъ прочности устройства солнечной системы. Если долгота перигелія π подвержена вѣковымъ возмущеніямъ, то это означаетъ, что линія апсидъ, т. е. большая ось планетной орбиты, совершаетъ въ плоскости орбиты вращеніе постоянно въ одномъ направленіи. При существованіи вѣковыхъ возмущеній въ долготѣ восходящаго узла ☊, линія узловъ планетной орбиты совершаетъ въ плоскости эклиптики вращеніе постоянно въ одномъ и томъ-же направленіи.

Замѣтимъ, что возмущенія въ движеніи небесныхъ тѣлъ, въ частности, въ движеніи планетъ часто называются планетными *неравенствами*.

§ 84. Главнѣйшія неравенства въ движеніи луны.

Луна совершаетъ свое движеніе вокругъ земли, которая въ этомъ случаѣ является центральнымъ тѣломъ. Солнце же, обладающее огромной массой, возмущаетъ эллиптическое движеніе луны вокругъ земли. Поэтому теорія движенія луны есть одна изъ очень трудныхъ задачъ небесной механики, и нѣкоторыя возмущенія въ движеніи этого небеснаго тѣла достигаютъ значительной величины. Въ настоящемъ параграфѣ мы укажемъ три главнѣйшія возмущенія или, какъ еще говорятъ, неравенства въ движеніи луны.

Первое неравенство, открытое Птолемеемъ, носитъ названіе *эвекціи* и состоитъ въ слѣдующемъ. Во время *новолунія*, когда луна располагается между землей и солнцемъ, это послѣднее сильнѣе притягиваетъ луну, чѣмъ землю, и вслѣдствіе этого разстояніе луны отъ земли увеличивается. Тотъ же самый эффектъ получается и во время *полнолунія*, когда солнце сильнѣе притягиваетъ землю, расположенную въ этомъ случаѣ между солнцемъ и луною. Въ *квадратурахъ*, когда разность геоцентрическихъ долготъ луны и солнца равна ± 90, и когда земля и луна находятся приблизительно на одинаковыхъ разстояніяхъ отъ солнца, оба эти тѣла одинаково притягиваются солнцемъ, и лишь благодаря тому, что направленія притяженій между солнцемъ и землей съ одной стороны и между солнцемъ и луной съ другой, составляютъ между собой нѣкоторый уголъ, разстояніе между луной и землей *уменьшается*, но вслѣдствіе незначительности только что упомянутаго угла уменьшеніе разстоянія въ этомъ случаѣ должно быть гораздо меньше, чѣмъ увеличеніе разстоянія во время новолуній и полнолуній. Такимъ образомъ эвекція сказывается въ томъ, что орбита луны вытягивается въ направленіи къ солнцу и сокращается въ перпендикулярномъ направленіи, причемъ удлиненіе болѣе сокращенія, и потому вся длина пути, описываемаго луной вокругъ земли, увеличивается, благодаря чему увеличивается и время обращенія луны.

Разсматриваемое неравенство усложняется еще тѣмъ, что линія апсидъ лунной орбиты постоянно перемѣщается въ одномъ направленіи, и потому, когда эта линія совпадаетъ съ направленіемъ *сизигій*, т. е. съ направленіемъ земля—луна—солнце (новолуніе) или луна—земля—солнце (полнолуніе), то притягательное дѣйствіе солнца увеличиваетъ длину большой оси, а слѣдовательно и эксцентриситетъ лунной орбиты. Въ это время эвекція достигаетъ своего наибольшаго значенія. Когда же линія апсидъ перпендикулярна къ направленію сизигій, то подъ притягательнымъ дѣйствіемъ солнца лунная орбита растягивается въ направленіи малой оси, эксцентриситетъ орбиты уменьшается, и орбита приближается къ круговой. Въ это время эвекція достигаетъ наименьшаго значенія.

Такимъ образомъ подъ вліяніемъ эвекціи мѣняется форма лунной орбиты, и вслѣдствіе этого должна мѣняться также и долгота луны. Эвекція выражается слѣдующей формулой:

$$+ 1°16'.5 \sin [2 (L_☾ — L_⊙) — M_☾],$$

гдѣ $L_☾$ есть средняя долгота луны, $L_⊙$ — средняя долгота солнца, $M_☾$ — средняя аномалія луны.

Періодъ этого неравенства равняется приблизительно 32 суткамъ. Членъ 2 ($L_☾$ — $L_⊙$) подъ знакомъ синуса обусловливаетъ измѣненіе долготы луны въ зависимости отъ взаимнаго расположенія луны, земли и солнца. Членъ $M_☾$ вноситъ въ эти измѣненія усложненіе въ зависимости отъ положенія линіи апсидъ, отъ которой отсчитывается средняя аномалія и которая въ годъ перемѣщается прямымъ движеніемъ приблизительно на 40°. Періодъ перваго члена равенъ 14.8 суткамъ, такъ какъ *синодическій* мѣсяцъ луны, т. е. промежутокъ времени между двумя послѣдовательными новолуніями или полнолуніями, содержитъ 29.53 сутокъ. Періодъ второго члена равенъ продолжительности такъ называемаго *аномалистическаго* мѣсяца, т. е. промежутку времени между двумя послѣдовательными прохожденіями луны черезъ перигей, и содержитъ 27.6 сутокъ, что нѣсколько короче синодическаго мѣсяца. Общій же періодъ эвекціи получается равнымъ около 32 сутокъ.

Второе неравенство, открытое датскимъ астрономомъ Тихо-Браге, носитъ названіе *варіаціи*. Это неравенство состоитъ въ измѣненіи скорости движенія луны въ различныхъ точкахъ ея орбиты. Во время полнолунія и новолунія направленіе движенія луны перпендикулярно направленію отъ луны къ солнцу, и тогда возмущающее вліяніе солнца не производитъ никакого измѣненія эллиптической скорости луны, т. е. скорости въ ея невозмущенномъ движеніи. Точно также во время квадратуры, когда земля и луна притягиваются солнцемъ приблизительно одинаковымъ образомъ, эллиптическая скорость луны также не подвергается измѣненію. Но при переходѣ луны отъ полнолунія къ послѣдней четверти и отъ послѣдней четверти къ новолунію, когда направленіе движенія луны болѣе или менѣе совпадаетъ съ направленіемъ возмущающей силы, и когда луна и земля находятся на различныхъ разстояніяхъ отъ солнца, дѣйствіе этого послѣдняго выражается въ увеличеніи скорости движенія луны. Наоборотъ, при переходѣ луны отъ новолунія къ первой четверти и отъ первой четверти къ полнолунію, когда движеніе луны болѣе или менѣе противоположно направленію возмущающей силы, эллиптическая скорость движенія луны уменьшается. Наибольшему измѣненію эллиптическая скорость луны подвергается въ такъ называемыхъ октантахъ, т. е. при положеніяхъ луны между квадратурами съ одной стороны и ново-

луніемъ или полнолуніемъ съ другой. Измѣненія скорости луны, конечно, влекутъ за собой измѣненія долготъ луны. Варіація выражается формулой:

$$+ 39'.5 \; sin \; 2 \; (L_{☾} - L_{\odot}),$$

и періодъ этого неравенства равенъ приблизительно 14.8 суткамъ.

Третье неравенство въ движеніи луны было открыто Кеплеромъ и получило названіе *годичнаго уравненія*. Такъ какъ земля движется вокругъ солнца по эллиптической орбитѣ, то разстоянія земли отъ солнца при различныхъ положеніяхъ земли на ея орбитѣ бываютъ различны. Въ зависимости отъ этого мѣняется также возмущающее дѣйствіе солнца на движеніе луны, которая вмѣстѣ съ землей то приближается къ солнцу, то удаляется отъ него. Такъ какъ земля полный оборотъ вокругъ солнца совершаетъ въ одинъ годъ, то періодъ разсматриваемыхъ измѣненій возмущающей силы солнца тоже равенъ одному году. Эти измѣненія возмущающей силы солнца вызываютъ соотвѣтственныя измѣненія въ долготѣ луны. Годичное уравненіе выражается формулой:

$$- 11'.2 \; sin \; M_{\odot},$$

гдѣ $M_{\odot}$ есть средняя аномалія солнца.

§ 85. Опредѣленіе массъ планетъ.

Приближенное опредѣленіе массы планеты, имѣющей спутника, производится очень легко на основаніи третьяго закона Кеплера. Разсматривая движеніе планеты вокругъ солнца, имѣемъ на основаніи третьяго закона Кеплера:

$$\frac{a^3}{P^2 \, (m_0 + m)} = \frac{k^2}{4\pi^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (292)$$

гдѣ a есть большая полуось планетной орбиты, P — продолжительность полнаго оборота планеты вокругъ солнца, m_0 — масса солнца, m — масса планеты, k — Гауссова постоянная, π — отношеніе окружности къ ея діаметру. Если планета m имѣетъ спутника, масса котораго равна m', и который, двигаясь вокругъ планеты по эллиптической орбитѣ съ большою полуосью a', совершаетъ полный оборотъ по орбитѣ въ промежутокъ времени P', то для системы, состоящей изъ этой планеты и ея спутника, на основаніи третьяго закона Кеплера мы имѣемъ:

$$\frac{a'^3}{P'^2 \, (m + m')} = \frac{k^2}{4\pi^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (293)$$

Исходя изъ всеобщности закона Ньютона, мы предполагаемъ, что въ этомъ случаѣ k имѣетъ такое же значеніе, какъ и для системы, состоящей изъ солнца и планеты.

Раздѣляя уравненіе (292) на уравненіе (293), получаемъ:

$$\frac{m + m'}{m_0 + m} = \frac{a'^3}{a^3} \cdot \frac{P^2}{P'^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (294)$$

Массу солнца m_0, какъ это обыкновенно дѣлаютъ, примемъ за единицу. Пренебрегая въ знаменателѣ лѣвой части уравненія (294) массой планеты m въ сравненіи съ массой солнца, будемъ имѣть:

$$m + m' = \frac{a'^3}{a^3} \cdot \frac{P^2}{P'^2}.$$

Это соотношеніе можемъ переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$m\left(1 + \frac{m'}{m}\right) = \frac{a'^3}{a^3} \cdot \frac{P^2}{P'^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (295)$$

Пренебрегая малой величиной $\frac{m'}{m}$, окончательно находимъ слѣдующую формулу для приближеннаго опредѣленія массы планеты m:

$$m = \frac{a'^3}{a^3} \cdot \frac{P^2}{P'^2}.$$

Величины a, a', P и P' предполагаются извѣстными изъ наблюденій. По этому способу Ньютонъ нашелъ для массы Юпитера величину $\frac{1}{1067}$.

Если бы отношеніе $\frac{m'}{m}$ было извѣстно, то при опредѣленіи массы планеты m его можно было бы принять во вниманіе. Въ частности при опредѣленіи массы земли по этому способу нельзя пренебрегать отношеніемъ $\frac{m'}{m}$, которое въ этомъ случаѣ равняется приблизительно $\frac{1}{80}$. Замѣтимъ, что масса луны можетъ быть опредѣлена изъ наблюденій надъ приливами и отливами.

Болѣе точно массы планетъ опредѣляются по тѣмъ возмущеніямъ, которыя эти планеты производятъ въ движеніи другихъ планетъ или близко подходящихъ къ нимъ кометъ. По этому способу для массы Юпитера получается величина $\frac{1}{1047}$. Этимъ способомъ опредѣляются также массы планетъ, не имѣющихъ спутниковъ.

ГЛАВА XIII.

Опредѣленіе орбитъ двойныхъ звѣздъ.

§ 86. Оптическія и физическія пары. Законы видимыхъ движеній въ двойныхъ звѣздахъ.

Двойная звѣзда можетъ представлять собой или оптическую пару, или физическую систему.

Въ оптической парѣ двѣ звѣзды, въ дѣйствительности отдѣленныя другъ отъ друга весьма большими разстояніями, случайно проектируются на небѣ одна возлѣ другой. Въ такой парѣ по истеченіи значительнаго промежутка времени, вслѣдствіе собственнаго движенія звѣздъ, можетъ быть обнаружено перемѣщеніе одной звѣзды относительно другой по прямой линіи.

Въ физической системѣ обѣ звѣзды совершаютъ орбитальное движеніе вокругъ общаго центра инерціи. Если одну звѣзду разсматривать какъ неподвижную, то другая будетъ совершать относительное движеніе вокругъ первой по нѣкоторой кривой. За неподвижную звѣзду обыкновенно принимаютъ болѣе яркую, и она носитъ названіе главной звѣзды; вторую звѣзду называютъ звѣздой-спутницей. Мы наблюдаемъ, конечно, не истинную орбиту звѣзды-спутницы, а видимую, которая есть проекція истинной орбиты на плоскость, перпендикулярную къ лучу зрѣнія. Мы будемъ принимать, что истинное движеніе звѣзды-спутницы происходитъ подъ дѣйствіемъ закона Ньютона. Слѣдовательно, въ истинномъ движеніи имѣетъ мѣсто законъ площадей, и истинная орбита звѣзды-спутницы вокругъ главной есть эллиптическая кривая, въ одномъ изъ фокусовъ которой находится главная звѣзда. Такъ какъ проекція площади любого сектора на плоскость видимой орбиты равна площади этого сектора, умноженной на косинусъ угла между плоскостями видимой и истинной орбитъ, то и для видимой орбиты долженъ имѣть мѣсто законъ площадей, что и наблюдается въ дѣйствительности. Кромѣ того, видимая орбита, будучи проекціей истинной эллиптической орбиты, также должна быть

эллиптической, причемъ главная звѣзда, находящаяся въ фокусѣ истинной орбиты, въ видимой орбитѣ должна находиться гдѣ-нибудь внутри. Это также наблюдается въ дѣйствительности.

§ 87. Подготовка наблюденій.

Займемся же опредѣленіемъ элементовъ истинной орбиты звѣзды-спутницы вокругъ главной звѣзды, исходя изъ наблюденій надъ ея видимой орбитой.

Прежде всего надо данныя, полученныя изъ наблюденій, сдѣлать пригодными для такого опредѣленія. Въ системахъ двойныхъ звѣздъ положеніе звѣзды-спутницы относительно главной звѣзды, можетъ быть опредѣлено разностями прямыхъ восхожденій ($\Delta\alpha$) и склоненій ($\Delta\delta$) обѣихъ звѣздъ. Но гораздо чаще вмѣсто этихъ разностей для той же цѣли пользуются разстояніемъ ρ между обѣими звѣздами, выраженнымъ въ угловой мѣрѣ, и угломъ положенія θ звѣзды-спутницы относительно главной звѣзды. При этомъ необходимо замѣтить, что угломъ положенія называется уголъ между дугой, соединяющей обѣ звѣзды, и кругомъ склоненія, проходящимъ черезъ главную звѣзду. Обыкновенно уголъ положенія считается отъ сѣвера къ востоку и далѣе черезъ югъ къ западу отъ 0° до 360°.

Такъ какъ углы положенія отсчитываются отъ круга склоненія, проходящаго черезъ главную звѣзду, а его положеніе съ теченіемъ времени измѣняется отъ прецессіи, то и углы положенія тоже подвержены измѣненію вслѣдствіе прецессіи. Опредѣлимъ же вліяніе прецессіи на углы положенія. Для этого вспомнимъ слѣдующія соотношенія, которыя выводятся въ курсѣ практической астрономіи *):

$$\Delta\alpha = \frac{\rho \sin \theta}{\cos \delta},$$

$$\Delta\delta = \rho \cos \theta.$$

Продифференцируемъ вторую изъ этихъ формулъ, считая въ ней ρ постояннымъ. Получаемъ:

$$-\rho \sin \theta \, d\theta = d\,(\Delta\delta).$$

Здѣсь $d\theta$ есть вліяніе прецессіи на уголъ положенія, а $d\,(\Delta\delta)$—разность вліяній прецессіи на склоненія звѣзды-спутницы и главной звѣзды. Вліяніе прецессіи на склоненіе любой звѣзды представляется выраженіемъ $n \cos \alpha$, гдѣ $n = 20''.05$; разность же вліяній на склоненія двухъ

*) А. А. Ивановъ. Практическая Астрономія. Спб. 1914, стр. 180.

звѣздъ получится черезъ дифференцированіе этого выраженія по α. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$d(\Delta\delta) = -n \sin\alpha\, d\alpha,$$

гдѣ $d\alpha$ есть разность прямыхъ восхожденій звѣзды-спутницы и главной звѣзды, т. е.

$$d\alpha = \Delta\alpha = \frac{\rho \sin\theta}{\cos\delta}.$$

Поэтому получаемъ:

$$-\rho \sin\theta\, d\theta = -n \sin\alpha \frac{\rho \sin\theta}{\cos\delta}.$$

Отсюда выводимъ:

$$d\theta = \frac{n \sin\alpha}{\cos\delta}.$$

Выражая n въ минутахъ дуги, имѣемъ:

$$d\theta = 0',334 \frac{\sin\alpha}{\cos\delta}.$$

Этой формулой выражается годовое измѣненіе угла положенія отъ прецессіи. Чтобы привести всѣ углы положенія къ какой-нибудь одной эпохѣ t_0, очевидно, къ каждому изъ нихъ надо прибавить поправку $d\theta\,(t_0 - t)$.

Далѣе, въ виду того, что какъ углы положенія, такъ и разстоянія нерѣдко содержатъ довольно значительныя ошибки наблюденій, эти величины необходимо подвергнуть уравниванію. Уравниваніе можно произвести, пользуясь слѣдующимъ графическимъ пріемомъ. Уголъ положенія θ есть нѣкоторая функція времени, такъ что мы можемъ написать:

$$\theta = f(t).$$

Если времена t принять за абсциссы, а углы положенія θ за ординаты, то предыдущее уравненіе представитъ нѣкоторую кривую. Графическій пріемъ уравниванія и заключается въ томъ, что эту кривую строятъ по точкамъ, стараясь провести ее такъ, чтобы она наименѣе отклонялась отъ полученныхъ точекъ. Затѣмъ по этой кривой отсчитываютъ времена t, соотвѣтствующія круглымъ значеніямъ угла положенія, напр. 0°, 10°, 20° и т. д. По найденнымъ такимъ образомъ значеніямъ t мы можемъ на основаніи формулы, выведенной въ курсѣ сферической астрономіи въ главѣ объ интерполированіи *) опредѣлить значенія произ-

*) А. А. Ивановъ. Курсъ Сферической Астрономіи. СПБ., 1911, стр. 43.

водной $\frac{dt}{d\theta}$ для $\theta = 0°$, $10°$, $20°$ и т. д. Это необходимо для вычисленія выравненныхъ разстояній ρ звѣзды-спутницы отъ главной звѣзды, соотвѣтствующихъ круглымъ значеніямъ угла положенія θ. Вычисленіе основано на слѣдующихъ соображеніяхъ. Мы уже знаемъ, что для видимой орбиты должна имѣть мѣсто пропорціональность площадей секторовъ соотвѣтственнымъ промежуткамъ времени, т. е. должно существовать соотношеніе:

$$\rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = c^2,$$

гдѣ $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ есть абсолютное значеніе этой производной, а c^2 — произвольная постоянная. Пользуясь этимъ соотношеніемъ, мы можемъ вычислить разстоянія ρ, соотвѣтствующія круглымъ значеніямъ угла положенія θ. Для этой цѣли совершенно произвольно можно для c^2 принять 10, 100 и т. д. Тогда для опредѣленія ρ будемъ имѣть формулу:

$$\rho = c \sqrt{\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}}} = c \sqrt{\frac{dt}{d\theta}},$$

въ которой $\frac{dt}{d\theta}$ вычисляется такъ, какъ это было указано выше.

Произвольность выбора значенія постоянной c^2 соотвѣтствуетъ построенію видимой орбиты въ томъ или другомъ произвольномъ масштабѣ.

§ 88. Построеніе видимой орбиты. Опредѣленіе элементовъ истинной орбиты.

Вычисливъ для круглыхъ значеній угла положенія θ разстоянія ρ звѣзды-спутницы отъ главной въ произвольномъ масштабѣ, какъ это было объяснено въ предыдущемъ параграфѣ, мы можемъ на основаніи этихъ данныхъ построить по точкамъ видимую орбиту. Видимая орбита есть, какъ извѣстно, эллиптическая кривая, причемъ главная звѣзда находится вообще гдѣ-нибудь внутри этой кривой. Построивъ видимую орбиту, опредѣляемъ центръ ея. По видимой орбитѣ намъ надо опредѣлить элементы истинной орбиты. Къ этому опредѣленію мы теперь и приступимъ.

Прежде всего перечислимъ элементы, подлежащіе опредѣленію. Они суть:

1) наклонность i плоскости истинной орбиты къ плоскости проекцій или, что то же, къ плоскости видимой орбиты;

2) долгота узла Ω, отсчитываемая отъ проекціи круга склоненія главной звѣзды на плоскость видимой орбиты, причемъ вслѣдствіе того, что неизвѣстно, какая часть истинной орбиты находится ближе къ намъ,

чѣмъ плоскость проекцій, и какая дальше, мы не можемъ отличить восходящаго узла отъ нисходящаго;

3) долгота π *періастрія*, т. е. ближайшей къ главной звѣздѣ точки истинной орбиты; эта долгота отсчитывается тоже отъ проекціи круга склоненія главной звѣзды на плоскость видимой орбиты; этотъ элементъ можетъ быть замѣненъ угловымъ разстояніемъ періастрія отъ узла, а именно $\omega = \pi - \Omega$;

4) эксцентриситетъ e истинной орбиты;

5) большая полуось a орбиты, причемъ, если неизвѣстенъ годичный параллаксъ звѣзды, приходится довольствоваться выраженіемъ a въ секундахъ дуги;

6) средняя аномалія M_0 въ нѣкоторую начальную эпоху t_0 или время τ прохожденія черезъ періастрій;

7) продолжительность T одного оборота звѣзды-спутницы вокругъ главной звѣзды, причемъ

$$T = \frac{360^\circ}{n},$$

гдѣ n есть ея среднее движеніе.

Седьмой элементъ при опредѣленіи орбитъ двойныхъ звѣздъ появляется потому, что въ этомъ случаѣ мы, зная a, не можемъ опредѣлить средняго движенія n по извѣстному уравненію

$$n = \frac{k\sqrt{M_{1,2}}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

въ которомъ остается неизвѣстной сумма $M_{1,2}$ массъ обѣихъ звѣздъ.

Первые пять элементовъ иногда называются *геометрическими*, два послѣдніе *механическими* или *динамическими*.

Въ виду того, что въ настоящее время задача объ опредѣленіи орбитъ двойныхъ звѣздъ не можетъ претендовать на большую точность, мы изложимъ здѣсь только одинъ способъ опредѣленія орбитъ, а именно, способъ, предложенный В. Гершелемъ и являющійся отчасти графическимъ, отчасти аналитическимъ.

Прежде, чѣмъ приступать къ изложенію этого способа, покажемъ, что отношеніе частей, на которыя раздѣляется какая-нибудь прямая въ истинной орбитѣ, равно отношенію соотвѣтственныхъ частей проекціи этой линіи на плоскость видимой орбиты. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что нѣкоторая прямая въ истинной орбитѣ раздѣлена на части m и n. Пусть φ есть уголъ, составляемый этой прямой съ плоскостью видимой орбиты. Тогда проекціи этихъ отрѣзковъ на плоскость видимой орбиты будутъ $m\cos\varphi$ и $n\cos\varphi$. Слѣдовательно отношеніе этихъ проекцій равно $\frac{m}{n}$, т. е отношенію самихъ отрѣзковъ. Отсюда уже негрудно понять,

что проекція центра истинной орбиты будетъ также центромъ видимой орбиты, и что проекціи большой и малой осей истинной орбиты будутъ сопряженными діаметрами въ видимой орбитѣ. Далѣе, если $2a'$ есть длина того діаметра видимой орбиты, который представляетъ проекцію большой оси истинной орбиты, и d — разстояніе отъ центра видимой орбиты до положенія главной звѣзды, которая въ видимой орбитѣ. какъ нетрудно понять, непремѣнно должна лежать на только что упомянутомъ діаметрѣ, то эксцентриситетъ истинной орбиты представится отношеніемъ $\frac{d}{a'}$. Слѣдовательно, если мы, построивъ, какъ было указано въ началѣ этого параграфа, видимую орбиту, опредѣлимъ ея центръ, проведемъ діаметръ черезъ этотъ центръ и положеніе главной звѣзды и измѣримъ длины $2a'$ и d, то эксцентриситетъ истинной орбиты опредѣлится по формулѣ:

$$e = \frac{d}{a'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (296)$$

При этомъ вполнѣ ясно, что эксцентриситетъ опредѣляется независимо отъ того масштаба, въ которомъ мы построили видимую орбиту.

Далѣе проведемъ и измѣримъ діаметръ, сопряженный съ діаметромъ, представляющимъ проекцію большой оси истинной орбиты. Измѣримъ также углы положенія обоихъ діаметровъ, отсчитывая ихъ отъ проекціи круга склоненія главной звѣзды на плоскость видимой орбиты. Пусть длины діаметровъ будутъ $2a'$ и $2b'$. Углы положенія этихъ діаметровъ обозначимъ соотвѣтственно буквами α и β.

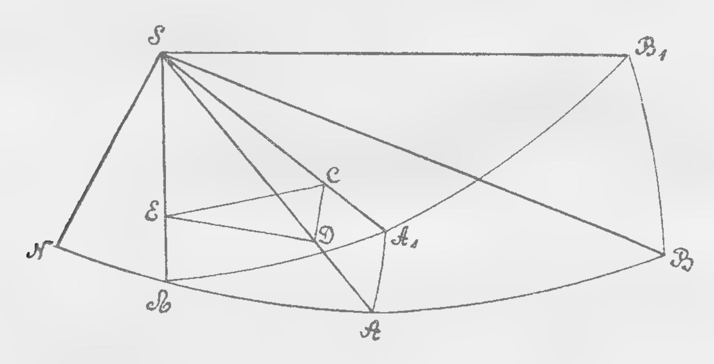


Рис. 42.

Для опредѣленія элементовъ ☊, ω и i вообразимъ вспомогательную сферу, за центръ которой S примемъ главную звѣзду (рис. 42). Проведемъ черезъ центръ этой сферы двѣ плоскости, одна изъ которыхъ параллельна плоскости видимой орбиты, а другая плоскости истинной орбиты. Эти плоскости въ пересѣченіи съ поверхностью вспомогательной сферы дадутъ дуги большихъ круговъ AB и A_1B_1, представляющія соотвѣт-

ственно видимую и истинную орбиты. Далѣе въ первой изъ этихъ плоскостей проведемъ черезъ центръ S линіи SN, $S\Omega$, SA и SB, параллельныя соотвѣтственно проекціи круга склоненія главной звѣзды на плоскость видимой орбиты, линіи пересѣченія плоскостей видимой и истинной орбитъ (линіи узловъ) и двумъ упомянутымъ выше сопряженнымъ діаметрамъ. Далѣе пусть на рис. 42 линіи SA_1 и SB_1 будутъ параллельны соотвѣтственно большой и малой полуосямъ истинной орбиты.

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\angle NS\Omega = \cup N\Omega = \Omega, \quad \angle NSA = \cup NA = \alpha, \quad \angle NSB = \cup NB = \beta,$$
$$\angle \Omega SA_1 = \cup \Omega A_1 = \omega, \qquad \angle A_1SB_1 = \cup A_1B_1 = 90^\circ,$$
$$\angle NS\Omega + \angle \Omega SA_1 = \cup N\Omega + \cup \Omega A_1 = \Omega + \omega = \pi.$$

Разсмотримъ сферическій треугольникъ $\Omega A_1 A$. Въ немъ

$$\Omega A_1 = \omega, \quad \Omega A = \alpha - \Omega, \quad \angle A_1 \Omega A = i, \quad \angle A_1 A \Omega = 90^\circ.$$

Основныя формулы сферической тригонометріи въ примѣненіи къ этому треугольнику даютъ:

$$\cos \omega = \cos(\alpha - \Omega) \cos AA_1$$
$$\sin \omega \cos i = \sin(\alpha - \Omega) \cos AA_1.$$

Изъ этихъ формулъ получаемъ:

$$\cos i = \operatorname{cotg} \omega \operatorname{tg}(\alpha - \Omega).$$

Обратимся далѣе къ сферическому треугольнику $\Omega B_1 B$. Такъ какъ въ этомъ случаѣ вмѣсто стороны ω мы должны взять $90^\circ + \omega$ и вмѣсто стороны $\alpha - \Omega$ сторону $\beta - \Omega$, то предыдущая формула въ примѣненіи къ новому треугольнику даетъ:

$$\cos i = -\operatorname{tg} \omega \operatorname{tg}(\beta - \Omega).$$

Раздѣляя предыдущую формулу на только что полученную, будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg}^2 \omega = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \Omega)}{\operatorname{tg}(\beta - \Omega)}.$$

Такъ какъ это уравненіе заключаетъ два неизвѣстныхъ ω и Ω, то надо постараться получить еще другое соотношеніе между тѣми же величинами. Для этой цѣли отложимъ отъ точки S по линіи SA_1 длину $SC = a$ (рис. 42). Опуская изъ точки C перпендикуляръ CD на плоскость видимой орбиты, мы получимъ на линіи SA длину $SD = a'$. Проектируя обѣ эти длины $SC = a$ и $SD = a'$ на линію узловъ $S\Omega$, мы

получимъ, какъ это слѣдуетъ изъ элементарной геометріи, одну и ту же длину SE. Такъ какъ $\angle CSE = \omega$, а $\angle DSE = \alpha - \Omega$, то получаемъ:

$$a \cos \omega = a' \cos (\alpha - \Omega) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (297)$$

Замѣняя большую полуось a и полудіаметръ a', малою полуосью b и полудіаметромъ b', мы подобнымъ же образомъ будемъ имѣть:

$$b \cos (90^\circ + \omega) = b' \cos (\beta - \Omega)$$

или

$$-\; b \sin \omega = b' \cos (\beta - \Omega) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (298)$$

Черезъ раздѣленіе уравненія (298) почленно на уравненіе (297) находимъ:

$$-\frac{b}{a}\, tg\, \omega = \frac{b'}{a'}\; \frac{\cos (\beta - \Omega)}{\cos (\alpha - \Omega)}.$$

Отсюда выводимъ:

$$tg^2 \omega = \frac{\left(\frac{b'}{a'}\right)^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2}\; \frac{\cos^2 (\beta - \Omega)}{\cos^2 (\alpha - \Omega)}.$$

Это и есть второе соотношеніе между неизвѣстными ω и Ω.

Сравнивая это выраженіе для $tg^2\, \omega$ съ найденнымъ выше выраженіемъ для той же величины, получаемъ:

$$\frac{\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 \cos^2 (\beta - \Omega)}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos^2 (\alpha - \Omega)} = -\frac{tg\, (\alpha - \Omega)}{tg\, (\beta - \Omega)}.$$

Изъ этого уравненія можно опредѣлить Ω. Мы имѣемъ:

$$\frac{\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 \cos (\beta - \Omega)}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos (\alpha - \Omega)} = -\frac{\sin (\alpha - \Omega)}{\sin (\beta - \Omega)}$$

или

$$\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 \sin 2\, (\beta - \Omega) + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin 2\, (\alpha - \Omega) = 0.$$

Раскрывая синусы, получаемъ:

$$\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 \sin 2\beta \cos 2\Omega - \left(\frac{b'}{a'}\right)^2 \cos 2\beta \sin 2\Omega +$$

$$+ \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin 2\alpha \cos 2\Omega - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos 2\alpha \sin 2\Omega = 0.$$

Отсюда окончательно находимъ:

$$tg\, 2\Omega = \frac{\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 \sin 2\beta + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin 2\alpha}{\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 \cos 2\beta + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos 2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (299)$$

По этому уравненію и опредѣляется долгота узла Ω. Четверть круга, въ которой лежитъ уголъ 2Ω, должна быть выбрана такъ, чтобы произведеніе

$$-\, tg\,(\alpha - \Omega)\, tg\,(\beta - \Omega) = \cos^2 i,$$

легко получаемое изъ двухъ выведенныхъ выше уравненій для опредѣленія $\cos i$, было положительное и меньше единицы. Но и этому условію, какъ нетрудно понять, будутъ удовлетворять два значенія угла Ω, отличающіяся другъ отъ друга на 180°. Эта двойственность получается потому, что въ данномъ случаѣ нельзя отличить восходящій узелъ отъ нисходящаго.

Входящая въ уравненіе (299) величина $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ вычисляется по формулѣ:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - e^2.$$

Теперь легко опредѣлить наклонность i и разстояніе ω перигелія отъ узла по уравненіямъ:

$$\cos i = \sqrt{-\, tg\,(\alpha - \Omega)\, tg\,(\beta - \Omega)} \quad \ldots\ldots \quad (300)$$

$$tg\,\omega = \frac{tg\,(\alpha - \Omega)}{\cos i}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (301)$$

причемъ углы ω и $\alpha - \Omega$ должны находиться въ одной четверти, а наклонность i, въ виду неопредѣленности узла, всегда можно брать меньше 90°.

Далѣе по формулѣ:

$$a = \frac{a' \cos\,(\alpha - \Omega)}{\cos \omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (302)$$

вычисляется большая полуось истинной орбиты. По этой формулѣ a получается въ тѣхъ же произвольныхъ единицахъ, въ какихъ выражались разстоянія отъ звѣзды-спутницы до главной звѣзды при построеніи видимой орбиты. Чтобы получить большую полуось истинной орбиты въ секундахъ, надо нѣсколько только что упомянутыхъ разстояній сравнить съ дѣйствительно измѣренными для тѣхъ же моментовъ разстояніями. Отсюда въ среднемъ мы и найдемъ, сколькимъ секундамъ дуги равняется

принятая нами при построенiи видимой орбиты единица длины, а слѣдовательно въ секундахъ же дуги опредѣлимъ и a.

Такимъ образомъ по формуламъ (296), (299), (300), (301) и (302) вычисляются геометрическiе элементы e, ☊, i, ω и a. Остается найти два динамическихъ элемента τ и T. Для этого обратимся опять къ рис. 42. Если на немъ мы будемъ линiю SA_1 считать направленiемъ не на перiастрiй, а на любое положенiе звѣзды-спутницы на истинной орбитѣ, то въ сферическомъ треугольникѣ ☊$A_1 A$ мы будемъ имѣть:

$$☊A_1 = \omega + v, \qquad ☊A = \theta - ☊, \qquad \angle A_1 ☊ A = i,$$

гдѣ v есть истинная аномалiя звѣзды-спутницы въ разсматриваемый моментъ и θ есть уголъ положенiя, соотвѣтствующiй этому моменту.

Изъ этого треугольника мы легко получаемъ:

$$tg\,(\omega + v) = \frac{tg\,(\theta - ☊)}{\cos i}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (303)$$

причемъ

$$\omega + v \quad \text{и} \quad \theta - ☊$$

должны лежать въ одной четверти.

Уголъ θ непосредственно измѣряется на видимой орбитѣ. По формулѣ (303) мы можемъ вычислить истинныя аномалiи v_1 и v_2 для двухъ произвольныхъ моментовъ t_1 и t_2. Послѣ этого по извѣстной формулѣ:

$$tg\,\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, tg\,\frac{v}{2}$$

вычисляемъ два соотвѣтствующихъ значенiя эксцентрической аномалiи E_1 и E_2. Затѣмъ по уравненiю Кеплера

$$M = E - e \sin E$$

вычисляемъ среднiя аномалiи M_1 и M_2. Такимъ образомъ будемъ имѣть два уравненiя:

$$\left.\begin{aligned} n\,(t_1 - \tau) &= M_1 \\ n\,(t_2 - \tau) &= M_2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (304)$$

съ двумя неизвѣстными n и τ. Здѣсь n есть среднее движенiе звѣзды, причемъ за единицу времени обыкновенно принимаются не сутки, а годъ.

Изъ уравненiй (304) получаемъ:

$$\frac{t_1 - \tau}{t_2 - \tau} = \frac{M_1}{M_2}$$

или

$$M_1\,(t_2 - \tau) = M_2\,(t_1 - \tau).$$

Отсюда

$$\tau = \frac{M_1 t_2 - M_2 t_1}{M_1 - M_2}.$$

Такъ какъ

$$t_2 = \frac{t_2 + t_1}{2} + \frac{t_2 - t_1}{2}$$

$$t_1 = \frac{t_2 + t_1}{2} - \frac{t_2 - t_1}{2},$$

то формулу для опредѣленія τ можемъ представить въ видѣ:

$$\tau = \frac{t_2 + t_1}{2} - \frac{M_2 + M_1}{M_2 - M_1} \frac{t_2 - t_1}{2}.$$

По этой формулѣ вычисляется время прохожденія звѣзды черезъ періастрій.

Послѣ этого изъ формулъ (304) для опредѣленія средняго движенія получаемъ:

$$n = \frac{M_1}{t_1 - \tau} = \frac{M_2}{t_2 - \tau}.$$

Зная же среднее движеніе, легко находимъ и время полнаго оборота звѣзды-спутницы вокругъ главной по формулѣ:

$$T = \frac{360^\circ}{n},$$

причемъ n предполагается выраженнымъ въ градусахъ.

Такимъ образомъ нами найдены всѣ семь элементовъ: e, Ω, i, ω, a, τ и T.

Чтобы посмотрѣть, насколько хорошо полученные элементы представляютъ движеніе звѣзды, надо по этимъ элементамъ вычислить для моментовъ наблюденій углы положенія и разстоянія. Для опредѣленія угловъ положенія служатъ формулы:

$$n = \frac{360^\circ}{T}$$

$$M = n(t - \tau)$$

$$E - e \sin E = M$$

$$tg \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} tg \frac{E}{2}$$

$$tg(\theta - \Omega) = tg(\omega + v) \cos i.$$

Чтобы вычислить разстояніе ρ, будемъ проектировать истинное разстояніе r звѣзды-спутницы отъ главной и видимое ρ, являющееся проекціей истиннаго на плоскость видимой орбиты, на линію узловъ. Тогда, какъ нетрудно убѣдиться, будемъ имѣть:

$$r \cos(\omega + v) = \rho \cos(\theta - \Omega).$$

Отсюда

$$\rho = \frac{r \cos(\omega + v)}{\cos(\theta - \Omega)}.$$

Но такъ какъ

$$r = a(1 - e \cos E),$$

то

$$\rho = a(1 - e \cos E)\frac{\cos(\omega + v)}{\cos(\theta - \Omega)}.$$

Разности между вычисленными и наблюденными θ и ρ и дадутъ намъ понятіе о точности элементовъ.

УПРАЖНЕНІЯ.

Задача № 23. Опредѣлить орбиту двойной звѣзды β *Delphini* по слѣдующимъ наблюденіямъ:

t	θ	ρ	Наблюдатель.
1873,60	355°	0″,7	Бурнгемъ
1874,66	15,6	0 ,65	Дембовскій
1874,70	13,6	0 ,49	Ньюкомбъ
1874,73	6,5	0 ,66	О. Струве
1875,65	20,1	0 ,54	Дембовскій
1875,86	15,1	0 ,42	Скіапарелли
1876,66	25,8	0 ,48	Дембовскій
1877,7	29,7	0 ,51	Дембовскій
1877,79	40,8	0 ,32	Бурнгемъ
1878,65	53,7	0 ,24	Бурнгемъ
1878,7	59,2	—	Дембовскій
1880,68	133,6	0 ,26	Бурнгемъ
1881,50	149,2	0 ,26	Бурнгемъ
1882,60	167,5	0 ,26	Бурнгемъ
1883,55	182,5	0 ,23	Бурнгемъ

Рѣшеніе. Приведеніе угловъ положенія къ одной эпохѣ въ данномъ случаѣ не представляется необходимымъ въ виду малости промежутка, охватывающаго наблюденія.

Произведя уравниваніе угловъ положенія, какъ указано въ курсѣ, вычисляемъ затѣмъ моменты t, которымъ соотвѣтствуютъ круглыя значенія угла положенія, производныя $\frac{dt}{d\theta}$ и разстоянія ρ, причемъ принимаемъ $c^2 = 100^{mm}$.

Въ такомъ случаѣ получаемъ слѣдующую таблицу:

θ	t	$\frac{dt}{d\theta}$	вычисл. ρ въ *mm.*	наблюд. ρ въ сек.
0°	1873,30			
10	75,00	0,142	37,7	0″,64
20	76,20	0,100	31,6	0 ,46
30	77,05	0,076	27,6	0 ,49
40	77,72	0,060	24,5	0 ,40
50	78,25	0,046	21,4	0 ,28
140	80,96	0,049	22,1	0 ,26
150	81,50	0,057	23,9	0 ,26
160	82,10	0,062	24,9	0 ,26
170	82,74	0,064	25,4	0 ,26
180	83,38			
			$239,1^{mm}$	3″,31

Изъ сравненія полученныхъ разстояній съ дѣйствительно измѣренными, находимъ, что $239,1^{mm}$ соотвѣтствуютъ 3″,31 и, слѣдовательно, 1^{mm} соотвѣтствуетъ 0″,014.

Послѣ этого по точкамъ строимъ видимую орбиту. Вычерчиваніе этой орбиты при недостаточности наблюденій есть самая трудная задача. Въ начерченномъ эллипсѣ отыскиваемъ центръ. Соединяя центръ съ положеніемъ главной звѣзды, получаемъ діаметръ, представляющій проекцію большой оси истинной орбиты. Затѣмъ строимъ діаметръ, сопряженный съ предыдущимъ.

Послѣ этого измѣренія даютъ:

$$\alpha = 160°,5,\quad \beta = 64°,2,\quad a' = 38,3,\quad b' = 21,0,\quad d = 13,6.$$

По формулѣ (296) вычисляемъ эксцентриситетъ:

$$e = 0,356.$$

Затѣмъ получаемъ:

$$log\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 9,941, \quad log\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 = 9,478, \quad 2\alpha = 321°,0,$$

$$2\beta = 128°,4, \quad log\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = 9,839, \quad log\frac{e}{sin\,1°} = 1,309.$$

Далѣе располагаемъ вычисленія въ такомъ порядкѣ:

$sin\,2\beta$	9,895	$\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 sin\,2\beta$	9,373	числ.	$9,496_n$
				знам.	9,692
$\left(\frac{b'}{a'}\right)^2$	9,478	$\left(\frac{b}{a}\right)^2 sin\,2\alpha$	$9,740_n$	$tg\,2☊$	$9,804_n$
			— 0,244		
$cos\,2\beta$	$9,793_n$				
$sin\,2\alpha$	$9,799_n$	$\left(\frac{b'}{a'}\right)^2 cos\,2\beta$	$9,271_n$	$2☊$	327°,5 или 147°,5
				☊	163 ,7 или 73 ,7
$\left(\frac{b}{a}\right)^2$	9,941	$\left(\frac{b}{a}\right)^2 cos\,2\alpha$	9,832		
			— 0,140		
$cos\,2\alpha$	9,891				

Послѣднее значеніе не годится. Поэтому ☊ = 163°,7 или 343°,7.

α — ☊	356°,8	$cos\,i$	9,761	a'	1,583
β — ☊	260 ,5	i	54°,8	$cos\,(\alpha$ — ☊$)$	9,999
$-tg\,(\alpha$ — ☊$)$	8,747				1,582
$tg\,(\beta$ — ☊$)$	0,776	$tg\,\omega$	$8,986_n$	$cos\,\omega$	9,998
$cos^2\,i$	9,523			a	1,584
		ω	354°,5	a =	38,4 mm
				a =	0″,54

	$t_1 = 1875,00$	$t_2 = 1882,10$
θ	10°,0	160°,0
θ — ☊	206 ,3	356,3
$tg\,(\theta$ — ☊$)$	9,694	$8,811_n$
$tg\,(\omega+v)$	9,933	$9,050_n$
$\omega+v$	220°,6	353°,6
v	226 ,1	359 ,1

$\frac{v}{2}$	113°,0	179°,6
$tg\,\frac{v}{2}$	$0,372_n$	$7,844_n$
$tg\,\frac{E}{2}$	$0,211_n$	$7,683_n$
$\frac{E}{2}$	121°,6	179°,7
E	243,2	359,4
$sin\,E$	$9,951_n$	$8,020_n$
$\frac{e}{sin\,1°}\,sinE$	$1,260_n$	$9,329_n$
$-\frac{e}{sin\,1°}\,sinE$	+ 18°,2	+ 0°,2
M	261,4	359,6

$$\frac{t_2+t_1}{2}=1878{,}55 \qquad M_2+M_1=621°{,}0.$$

$$\frac{t_2-t_1}{2}=3{,}55 \qquad M_2-M_1=98{,}2.$$

M_2+M_1	2,793
$\frac{t_2-t_1}{2}$	0,550
	3,343
M_2-M_1	1,992
	1,351
$\frac{M_2+M_1}{M_2-M_1}\,\frac{t_2-t_1}{2}$	22,45

$$\tau=1856{,}10.$$

Далѣе вычисляемъ n:

$$n=\frac{M_1}{t_1-\tau}=\frac{261°{,}4}{18{,}9}=13°.8.$$

Поэтому $$T=\frac{360}{n}=\frac{360}{13{,}8}=26{,}0.$$

Такимъ образомъ имѣемъ элементы:

$$e = 0{,}356$$

$$\Omega = 163^\circ{,}7 \text{ или } 343^\circ{,}7$$

$$i = \ \ 54\ {,}8$$

$$\omega = 354\ {,}5$$

$$a = 0''{,}54$$

$$\tau = 1856{,}10$$

$$T = 26{,}0 \text{ лѣтъ.}$$

Таблицы.

ТАБЛИЦА I.

n	$\frac{1}{2}n(n-1)$	n	$\frac{1}{2}n(n-1)$	n	$\frac{1}{2}n(n-1)$	n	$\frac{1}{2}n(n-1)$
0.00	—0 00	0.26	—0.10	0.50	—0.12	0.76	—0.09
1	0	27	10	51	12	77	9
2	1	28	10	52	12	78	9
3	1	29	10	53	12	79	8
4	2	0.30	10	54	12	0.80	8
5	2	31	11	55	12	81	8
6	3	32	11	56	12	82	7
7	3	33	11	57	12	83	7
8	4	34	11	58	12	84	7
9	4	35	11	59	12	85	6
0.10	4	36	12	0.60	12	86	6
11	5	37	12	61	12	87	6
12	5	38	12	62	12	88	5
13	6	39	12	63	12	89	5
14	6	0.40	12	64	12	0.90	4
15	6	41	12	65	11	91	4
16	7	42	12	66	11	92	4
17	7	43	12	67	11	93	3
18	7	41	12	68	11	94	3
19	8	45	12	69	11	95	2
0.20	8	46	12	0.70	10	96	2
21	8	47	12	71	10	97	1
22	9	48	12	72	10	98	1
23	9	49	12	73	10	99	0
24	9	0.50	—0.12	74	10	1.00	—0.00
0.25	—0.10			0.75	—0.09		

ТАБЛИЦА II.

η	*log y*	η	*log y*	η	*log y*
0.000	0.000000	0.030	0.000130	0.060	0.000522
1	0	31	139	61	540
2	1	32	148	62	558
3	1	33	158	63	576
4	2	34	168	64	595
5	4	35	178	65	613
6	5	36	188	66	632
7	7	37	198	67	652
8	9	38	209	68	671
9	12	39	220	69	691
0.010	0.000014	0.040	0.000232	0.070	0.000712
11	18	41	244	71	732
12	21	42	256	72	753
13	24	43	268	73	774
14	28	44	281	74	796
15	33	45	294	75	817
16	37	46	307	76	840
17	42	47	320	77	862
18	47	48	334	78	884
19	52	49	348	79	907
0.020	0.000058	0.050	0.000362	0.080	0.000930
21	64	51	377	81	954
22	70	52	392	82	978
23	77	53	407	83	1002
24	83	54	423	84	1026
25	90	55	439	85	1051
26	98	56	455	86	1076
27	106	57	471	87	1101
28	114	58	488	88	1127
29	122	59	505	89	1153

η	*log y*	η	*log y*	η	*log y*
0.090	0.001179	0.120	0.002105	0 150	0.003307
91	1206	121	2140	151	3352
92	1232	122	2176	152	3397
93	1259	123	2212	153	3443
94	1287	124	2249	154	3489
95	1314	125	2286	155	3535
96	1342	126	2323	156	3581
97	1371	127	2360	157	3628
98	1399	128	2398	158	3675
99	1428	129	2436	159	3723
0.100	0.001457	0.130	0.002474	0.160	0.003771
101	1487	131	2513	161	3819
102	1517	132	2552	162	3867
103	1547	133	2591	163	3916
104	1577	134	2631	164	3965
105	1608	135	2671	165	4014
106	1639	136	2711	166	4064
107	1670	137	2752	167	4114
108	1702	138	2792	168	4164
109	1734	139	2834	169	4215
0.110	0.001766	0.140	0.002875	0.170	0.004266
111	1798	141	2917	171	4318
112	1831	142	2959	172	4369
113	1864	143	3001	173	4421
114	1898	144	3044	174	4474
115	1932	145	3087	175	4526
116	1966	146	3130	176	4579
117	2000	147	3174	177	4632
118	2035	148	3218	178	4686
119	2070	149	3262	179	4740

η	$\log y$	η	$\log y$	η	$\log y$
0.180	0.004794	0.210	0.006579	0.240	0.008674
181	4849	211	6644	241	8750
182	4904	212	6709	242	8826
183	4959	213	6774	243	8902
184	5015	214	6840	244	8978
185	5071	215	6906	245	9055
186	5127	216	6972	246	9132
187	5184	217	7039	247	9210
188	5241	218	7106	248	9288
189	5298	219	7174	249	9366
0.190	0.005356	0.220	0.007242	0.250	0.009445
191	5414	221	7310	251	9524
192	5472	222	7379	252	9603
193	5530	223	7448	253	9683
194	5589	224	7517	254	9764
195	5649	225	7587	255	9844
196	5708	226	7657	256	9925
197	5768	227	7727	257	10006
198	5829	228	7798	258	10088
199	5889	229	7869	259	10170
0.200	0.005950	0.230	0.007940	0.260	0 010253
201	6012	231	8012	261	10336
202	6073	232	8084	262	10419
203	6135	233	8157	263	10502
204	6198	234	8230	264	10586
205	6260	235	8303	265	10671
206	6323	236	8376	266	10756
207	6387	237	8450	267	10841
208	6450	238	8525	268	10926
209	6514	239	8599	269	11012

η	log y	η	log y	η	log y
0.270	0.011098	0.300	0.013872	0.330	0.017020
271	11185	301	13971	331	17132
272	11272	302	14070	332	17244
273	11360	303	14170	333	17357
274	11448	304	14270	334	17470
275	11536	305	14370	335	17584
276	11624	306	14471	336	17698
277	11714	307	14572	337	17812
278	11803	308	14674	338	17927
279	11893	309	14776	339	18042
0.280	0.011983	0.310	0.014879	0.340	0.018158
281	12074	311	14982	341	18275
282	12165	312	15085	342	18391
283	12256	313	15189	343	18509
284	12348	314	15293	344	18626
285	12440	315	15398	345	18744
286	12533	316	15503	346	18863
287	12626	317	15608	347	18982
288	12719	318	15714	348	19102
289	12813	319	15821	349	19222
0.290	0.012907	0.320	0.015928	0.350	0.019342
291	13002	321	16035	351	19463
292	13097	322	16143	352	19585
293	13192	323	16251	353	19707
294	13288	324	16360	354	19829
295	13385	325	16469	355	19952
296	13481	326	16578	356	20075
297	13578	327	16688	357	20199
298	13676	328	16798	358	20324
299	13774	329	16909	359	20448

η	log y	η	log y	η	log y
0.360	0.020574	0.390	0.024568	0.420	0.029046
361	20700	391	24709	421	29204
362	20826	392	24851	422	29362
363	20953	393	24993	423	29522
364	21080	394	25136	424	29682
365	21208	395	25279	425	29842
366	21336	396	25423	426	30004
367	21465	397	25567	427	30165
368	21594	398	25712	428	30328
369	21724	399	25858	429	30491
0.370	0.021854	0.400	0.026004	0.430	0.030654
371	21985	401	26151	431	30819
372	22116	402	26298	432	30984
373	22248	403	26446	433	31149
374	22380	404	26594	434	31315
375	22513	405	26743	435	31482
376	22646	406	26892	436	31649
377	22780	407	27043	437	31817
378	22915	408	27193	438	31986
379	23049	409	27344	439	32155
0.380	0.023185	0.410	0.027496	0.440	0.032325
381	23321	411	27648	441	32496
382	23457	412	27801	442	32667
383	23594	413	27955	443	32839
384	23732	414	28109	444	33011
385	23870	415	28264	445	33184
386	24008	416	28419	446	33358
387	24147	417	28575	447	33532
388	24287	418	28731	448	33707
389	24427	419	28888	449	33883
				0.450	0.034060

ТАБЛИЦА III.

Постоянныя.

		log
Основаніе натуральныхъ логариѳмовъ	$e = 2.7182818$	0.4342945
Модуль Бригговыхъ логариѳмовъ	$\lambda = 0.4342945$	9.6377843
sin 1°		8.2418553
sin 1′		6.4637261
sin 1″		4.6855749
Отношеніе окружности къ діаметру	$\pi = 3.1415927$	0.4971499
Гауссова постоянная въ частяхъ радіуса . . .	$k = 0.01720210$	8.2355814
Гауссова постоянная въ секундахъ дуги . . .	$k = 3548''.18761$	3.5500066
Свѣтъ пробѣгаетъ большую полуось земной орбиты въ	$498^s.65$	2.6977958

ТАБЛИЦА IV.

Массы большихъ планетъ.

(по Ньюкомбу)

	m
Меркурій	$\frac{1}{6000000}$
Венера	$\frac{1}{408000}$
Земля + Луна	$\frac{1}{329390}$
Марсъ	$\frac{1}{3093500}$
Юпитеръ	$\frac{1}{1047.355}$
Сатурнъ	$\frac{1}{3501.6}$
Уранъ	$\frac{1}{22869}$
Нептунъ	$\frac{1}{19314}$

ТАБЛИЦА V.

Таблица для нахожденія числа дней, протекшихъ отъ начала года.

Дата.		Простой годъ.	Високосный годъ.
Января	0.0	0	0
Февраля	0.0	31	31
Марта	0.0	59	60
Апрѣля	0.0	90	91
Мая	0.0	120	121
Іюня	0.0	151	152
Іюля	0.0	181	182
Августа	0.0	212	213
Сентября	0.0	243	244
Октября	0.0	273	274
Ноября	0.0	304	305
Декабря	0.0	334	335

ТАБЛИ

Элементы орбитъ большихъ планетъ для 1900 Января

Планета.	Средн. долг. эпохи (L_0).	Долгота перигелія (π).	Долгота восх. узла (☊).
Меркурій ☿	182°16′17″.33	75°53′49″.82	47° 8′41″.05
Венера ♀	344 22 11 .05	130 8 26 .05	75 47 17 .13
Земля ♁	100 40 57 .05	101 13 7 .32	—
Марсъ ♂	294 15 53 .22	334 13 5 .99	48 47 12 .12
Юпитеръ ♃	238 7 56 .59	12 43 15 .50	99 26 36 .29
Сатурнъ ♄	266 35 52 .35	91 5 53 .57	112 47 25 .49
Уранъ ♅	244 12 33 .26	171 32 55 .29	73 28 37 .60
Нептунъ ♆	84 27 50 .45	46 43 38 .51	130 40 53 .00

ТАБЛИЦА VI.

Превращеніе дней въ части года.

Дни.		Дни.		Дни.		Дни.		Дни.	
10	0.027	100	0.274	190	0.520	280	0.767	1	0.003
20	0.055	110	0.301	200	0.548	290	0.794	2	0.005
30	0.082	120	0.329	210	0.575	300	0.822	3	0.008
40	0.110	130	0.356	220	0.603	310	0.849	4	0.011
50	0.137	140	0.383	230	0.630	320	0.877	5	0.014
60	0.164	150	0.411	240	0.657	330	0.904	6	0.016
70	0.192	160	0.438	250	0.685	340	0.931	7	0.019
80	0.219	170	0.466	260	0.712	350	0.959	8	0.022
90	0.247	180	0.493	270	0.740	360	0.986	9	0.025

Ц А VII.

1.0 средняго Гринвичскаго времени (по Леверье и Гайо).

Наклонность (i).	Эксцентриситетъ (e).	Среднее сут. движ. (n).	Логариѳмъ большой полуоси ($log\ a$).
7° 0′10″.85	0.2056149	14732″.4197	9.5878214
3 23 37 .09	0.0068164	5767 .6698	9.8593360
—	0.0167498	3548 .1928	0.0000006
1 51 1 .09	0.0933088	1886 .5183	0.1828932
1 18 31 .45	0.0483348	299 .1283	0.7162172
2 29 33 .07	0.0558923	120 .4547	0.9802192
0 46 20 .87	0.0463444	42 .2309	1.2837114
1 46 45 .27	0.0089970	21 .5349	1.4787046

ЛИТЕРАТУРА.

Въ заключеніе приводится списокъ основныхъ курсовъ и руководствъ по Теоретической Астрономіи.

Савичъ. Теоретическая астрономія. СПБ. 1884.

Хандриковъ. Теорія движенія планетъ и кометъ около солнца по коническимъ сѣченіямъ. Кіевъ 1890.

Крыловъ. Бесѣды о способахъ опредѣленія орбитъ кометъ и планетъ по малому числу наблюденій. СПБ. 1911.

Watson. Theoretical astronomy. Philadelphia. 1900.

Oppolzer. Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. I Band. Leipzig. 1882.
(Имѣется во французскомъ переводѣ, Paris 1886).

Tisserand. Leçons sur la détermination des orbites. Paris. 1899.

Bauschinger. Die Bahnbestimmung der Himmelskörper. Leipzig. 1906.

Klinkerfues. Theoretische Astronomie. Braunschweig. 1912.

Moulton. An introduction to celestial mechanics. New-York. 1902.

Boccardi. Guide du calculateur. II Partie. Paris. 1902.

Callandreau. Aperçu des méthodes pour la détermination des orbites des comètes et des planètes. Paris 1902.